

الباب الأول

المجموعات

SETS

١ - ١ مقدمة

يرجع الفضل في نشأة نظرية المجموعات إلى العالم الألماني جورج كانتور (١٨٤٥ - ١٩١٨). وقد قادت بحوث كانتور في المتسلسلات المثلية والمتسلسلات الحقيقية والحاجة إلى مقارنة حجوم المجموعات المختلفة إلى وضع أسس نظرية المجموعات. وجدير بالذكر أن أفكار كانتور قوبلت بادىء الأمر بالرفض من معاصريه من علماء الرياضيات ، ولكن نجح نظريته في إيجاد برهان على وجود الأعداد المسترسلة (مثل π ، e ، ...) وكذلك وجود تطبيقات للنظرية في الهندسة والتحليل الرياضى أدت إلى قبول أفكار كانتور، ولم يمض عام ١٨٩٠ حتى أصبحت نظرية المجموعات فرعاً معترفاً به من فروع الرياضيات.

١ - ٢ مفهوم المجموعة Concept of a Set

يمكن أن يقال لتجمع من الأشياء من نوع واحد أو من أنواع مختلفة أنه يكون مجموعة *set* إذا استطعنا أن نحدد ما إذا كان شىء ما ينتمى إلى *belongs to* أو لا ينتمى إلى *does not belong to* هذه المجموعة. وإذا انتمى الشىء إلى المجموعة فإنه يسمى عنصراً من عناصر المجموعة *element of the set* :

فمثلاً:

(أ) الأعداد الطبيعية تكون مجموعة وتكتب $N = \{1,2,3,\dots\}$.

(ب) { القلم الذى تكتب به، الكتاب الذى بين يديك، المنضدة التى أمامك، باب حجرة الدراسة } هى مجموعة.

(ج) الأعداد الحقيقية التى تنحصر بين ٠،١ تكوّن مجموعة وتكتب $\{x: 0 < x < 1\}$.

(د) طلاب الجامعة الذين تتجاوز أعمارهم ٢٠ سنة يكوّنون مجموعة.

(هـ) طلاب الجامعة الذين تقل أعمارهم عن ١٢ سنة يكوّنون مجموعة! (لعلك لاحظت أن هذه المجموعة لا تحتوى على أى عنصر).

أما إذا قلنا :

(و) "الألوان المائلة للون الاحمر" فإن هذه ليست مجموعة حيث أن تحديد اللون هنا مسألة تقديرية. ويجب بدلا من ذلك أن نقول "الألوان التى يزيد طول موجتها عن ٤٠٠٠ أنجشتروم" مثلا، فهذه تكوّن مجموعة.

(ز) "الطلاب طوال القامة" لا يكوّنون مجموعة حيث أننا لم نحدد الطول الذى إذا تعده الشخص يعتبر طويل القامة. ويجب بدلا من ذلك أن نقول الطلاب الذين يزيد طول قامتهم عن ١٧٠ سنتيمتر مثلا، فهؤلاء يكوّنون مجموعة. سنرمز للمجموعات بالرموز A, B, C, \dots ؛ أما الأشياء التى تحتويها المجموعة (أى العناصر) فنستعمل لها الرموز a, b, c, \dots وإذا كان العنصر a مثلا ينتمى إلى المجموعة A فإننا نكتب $a \in A$ ، أما إذا كان العنصر a لا ينتمى إلى المجموعة A فإننا نكتب $a \notin A$.

٣ - ١ تمثيل المجموعات Representation of Sets

توجد طريقتان لتمثيل المجموعات وهما:

طريقة الحصر *Tabulation Method*

وفيها نحصر كل عناصر المجموعة (أو عددا كافيا منها يمثلها) بين القوسين { } كما في المثالين (أ) ، (ب).

طريقة القاعدة *Rule Method*

وفيها نضع رمزا مثل x يمثل عناصر المجموعة ثم نكتب القاعدة التي تتبعها جميع عناصر المجموعة كما في المثال (ج).

وجدير بالذكر أن بعض المجموعات تقبل التمثيل بطريقة دون الأخرى وبعضها يقبل التمثيل بالطريقتين معا؛ فالمثال (ب) لا يقبل التمثيل إلا بطريقة الحصر في حين أن المثال (ج) لا يقبل التمثيل إلا بطريقة القاعدة، أما المثال التالي فيقبل التمثيل بالطريقتين معا:

مثال

مثل مجموعة الأعداد الطبيعية A المحصورة بين 3 ، 11 بطريقتين.

الحل

$$A = \{x : x \in \mathbb{N} , 3 < x < 11\} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$$

١ - ٤ المجموعات الجزئية *Subsets*

يقال لمجموعة ما A أنها مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان أى عنصر من عناصر A هو أيضا عنصر من عناصر B ، وعندئذ نكتب $A \subset B$. أى أن:

$$A \subset B \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B]^{(*)}$$

(*) الرمز \Leftrightarrow يعنى "إذا، فقط إذا" ؛ والرمز \Rightarrow يعنى "يؤدى إلى" وستدرسهما تفصيلا في باب المنطق الرياضى

مثال (١)

لتكن $A = \{1,3,7\}$ ، $B = \{1,2,3,5,7\}$ ، $C = \{1,2,3,6\}$. فإن A مجموعة جزئية من B حيث أن جميع عناصر A تنتمي أيضا إلى B ، وبالمثل فإن مجموعة B جزئية من C ، ولكن A ليست مجموعة جزئية من C لوجود العنصر 7 في B وهو لا ينتمي إلى C .

مثال (٢)

لتكن A هي مجموعة طلاب كلية ما، ولتكن B هي مجموعة طلاب الكلية المشتركين في أنشطة رياضية. وحيث أن كل طالب في نشاط رياضي هو أصلا طالب بالكلية، فإن B هي مجموعة جزئية من A . وإذا وجد طالب واحد بالكلية غير مشترك في أنشطة رياضية قيل أن B مجموعة جزئية فعلية *proper subset* من A ؛ أما إذا كان جميع طلاب الكلية مشتركين في أنشطة رياضية فإن B تكون مجموعة جزئية غير فعلية *improper subset* من A (لاحظ في هذه الحالة أن المجموعة B هي نفسها A).

٥-١ تساوي المجموعات Equality of Sets

يقال أن المجموعة A تساوي المجموعة B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي إلى B وكل عنصر من عناصر B ينتمي إلى A . أي أن:

$$[A = B] \Leftrightarrow [A \subset B \ \& \ B \subset A]$$

مثال

$$\{a, e, i, o, u\} = \{i, u, a, o, e\}$$

٦-١ المجموعة الخالية The Empty Set

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أى عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ وهي بالنسبة لجزر المجموعات بمثابة الصفر من الأعداد.

مثال (١)

مجموعة الأعداد الفردية التي تقبل القسمة على ٢ هي مجموعة خالية.

مثال (٢)

مجموعة طلاب الجامعة تحت سن ١٢ سنة هي مجموعة خالية.
نظرية

المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أى مجموعة إختيارية A.
البرهان

لنفرض العكس هو الصحيح، أى لنفرض أن ϕ ليست مجموعة جزئية من A .
إذن يوجد عنصر واحد على الأقل ينتمى إلى ϕ ولا ينتمى إلى A . ولكن هذا غير صحيح حيث أن ϕ لا تحتوي على أى عنصر . إذن الفرض غير صحيح،
وتكون ϕ مجموعة جزئية من A .

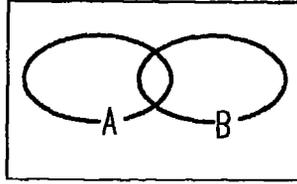
٧-١ المجموعة الشاملة The Univesal Set

المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي أية مجموعة أخرى كمجموعة جزئية. وهذه المجموعة قد تتغير بتغير موضوع المناقشة؛ فمثلا إذا أردنا أن نتكلم عن كليات جامعة معينة فان الجامعة تعتبر هي المجموعة الشاملة في حين تعتبر الكليات مجموعات جزئية؛ فمثلا الكليات النظرية بمجموعة، والكليات العملية بمجموعة أخرى والكليات التي يزيد طلابها عن عدد معين بمجموعة

ثالثة.. وهكذا. وإذا أردنا أن نتكلم عن الأعداد الفردية، والأعداد الزوجية، والأعداد الأولية، والأعداد التي تقبل القسمة على عدد معين،... فإن المجموعة الشاملة هنا هي مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1,2,3,\dots\}$. هذا، ويرمز عادة للمجموعة الشاملة بالرمز S .

٨-١ أشكال فن Venn Diagrams

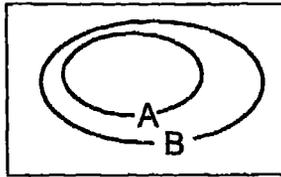
تستخدم أشكال فن في تصور كثير من المجموعات والعلاقات الجبرية التي تربط بينها. وفي هذه الأشكال تمثل المجموعة الشاملة S بمستطيل وتمثل أى مجموعة جزئية منها بشكل مغلق داخل هذا المستطيل (أنظر شكل ١-١).



S

شكل ١-١

فإذا أردنا مثلاً أن نمثل العلاقة $A \subset B$ فإننا نمثلها بالشكل ٢-١ (لاحظ من الشكل أن المجموعة B ليست مجموعة جزئية من المجموعة A ($B \not\subset A$)).



S

شكل ٢-١

٩-١ العمليات الجبرية على المجموعات Operations on Sets

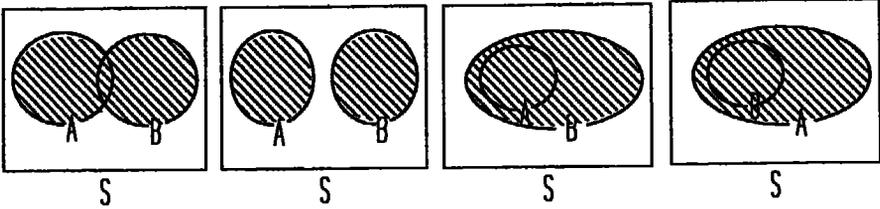
نستطيع أن نعرف مجموعات مركبة من أخرى بسيطة بواسطة العمليات الآتية:

١-٩-١ الاتحاد The Union

إتحاد مجموعتين A ، B هو مجموعة عناصرها تنتمي إلى A أو إلى B أو كليهما ويرمز له بالرمز $A \cup B$. أى أن:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

حيث تفيد "أو" أن x تنتمي إلى A أو B أو كليهما. (أنظر شكل ٣-١ حيث يمثل الاتحاد بالمناطق المظللة).



شكل ٣-١

مثال (١)

لتكن $A = \{1,2,5,7\}$ ولتكن $B = \{1,5,6,8\}$. إذن:

$$A \cup B = \{1,2,5,7\} \cup \{1,5,6,8\} = \{1,2,5,6,7,8\}$$

(لاحظ أن عدد عناصر A يساوى 4 وعدد عناصر B يساوى 4 ولكن عدد

عناصر $A \cup B$ يساوى 6 وليس 8 لماذا؟).

مثال (٢)

لتكن A هي مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، ٢٠ ، التى تقبل القسمة على

٢ ولتكن B هي مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، ٢٠ ، التى تقبل القسمة

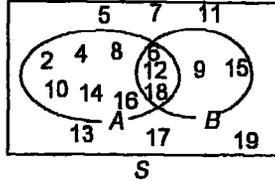
على ٣. أكتب مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، ٢٠ التي تقبل القسمة على ٢ أو ٣.
الحل

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\} , B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، 20 التي تقبل القسمة على 2 أو 3 هي:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

(أنظر شكل ٤-١).



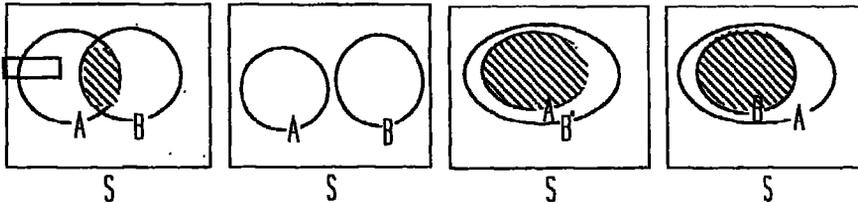
شكل ٤-١

٢-٩-١ التقاطع The Intersection

تقاطع مجموعتين A ، B هو مجموعة عناصرها تنتمي إلى كل من المجموعتين A ، B . ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $A \cap B$. أي أن:

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$$

وإذا كان $A \cap B$ هو المجموعة الخالية قيل أن المجموعتين A ، B متباعدتان disjoint (أنظر شكل ٥-١ حيث المناطق المظلمة تمثل التقاطع).



شكل ٥-١

مثال (١)

لتكن $A = \{1,2,5,7\}$ ولتكن $B = \{1,5,6,8\}$ ، فإن:

$$A \cap B = \{1,2,5,7\} \cap \{1,5,6,8\} = \{1,5\}$$

مثال (٢)

لتكن $A = \{1,3,5,\dots\}$ هي مجموعة الأعداد الفردية، ولتكن $B = \{2,4,6,\dots\}$ هي مجموعة الأعداد الزوجية. فإن:

$$A \cap B = \emptyset$$

أى أن المجموعتين A ، B متباعدتان (لاحظ أنه لا يوجد عدد فردى وزوجى فى آن واحد).

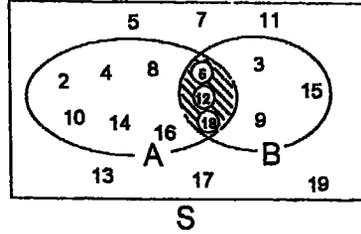
مثال (٣)

لتكن S هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 ؛ ولتكن A هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة على 2 ، B هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التى تقبل القسمة على 3. أوجد $A \cap B$ ومثل هذه المجموعات على شكل فن.

الحل

$$A \cap B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\} \cap \{3,6,9,12,15,18\} = \{6,12,18\}$$

ويبين شكل (١ - ٦) هذه المجموعات حيث تمثل المنطقة المظلمة $A \cap B$.



شكل ١ - ٦

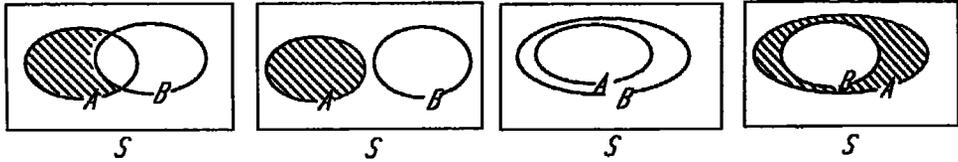
٣-٩-١ الفرق $A - B$

الفرق $A - B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B . أي:

$$A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

ويوضح شكل ٧-١ بعض الحالات المختلفة لمجموعة الفرق حيث تمثل المناطق

المظللة المجموعة $A - B$.



شكل ٧-١

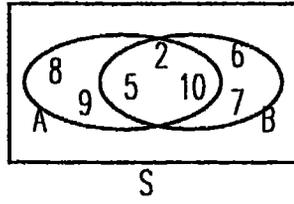
لاحظ أن $A - B$ لا يساوي $B - A$.

مثال (١)

إذا كانت $A = \{2, 5, 6, 7, 10\}$ ، $B = \{2, 5, 8, 9, 10\}$ ، فإن:

$$A - B = \{6, 7\} , B - A = \{8, 9\}$$

ويتبين ذلك من شكل ٨-١.



شكل ١-٨

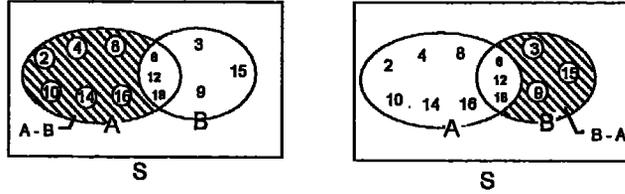
مثال (٢)

لتكن S هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١ ، ٢٠ وتكن A هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١ ، ٢٠ التي تقبل القسمة على ٢ ، B هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١ ، ٢٠ التي تقبل القسمة على ٣ .
أوجد كلا من $A - B$ ، $B - A$ ومثل هذه المجموعات على شكل فن.

الحل

$$A - B = \{2,4,8,10,14,16\} , B - A = \{3,9,15\}$$

شكل ١ - ٩ بين هاتين المجموعتين.



شكل ١ - ٩

ويتضح من الشكل أن مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على 2 ولا تقبل القسمة على 3 هي:

$$A - B = \{2,4,8,10,14,16,20\}$$

ومجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على 3 ولا تقبل القسمة على 2 هي:

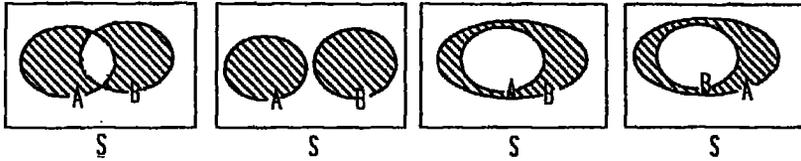
$$B - A = \{3,9,15\}$$

٤-٥ : الفرق المتماثل Symmetric Difference

الفرق المتماثل $A \Delta B$ هو المجموعة التي تحتوي كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى B بالإضافة إلى كل العناصر التي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A . أي أن:

$$A \Delta B = \{x(x \in A, x \notin B) \text{ أو } (x \in B, x \notin A)\}$$

وبين شكل ١-١ الحالات المختلفة لمجموعة الفرق المتماثل حيث يمثل بالمناطق المظلمة:



شكل ١-١

ويتضح من الشكل أن:

$$A \Delta B = B \Delta A$$

وأن:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

كما ستثبت ذلك فيما بعد.

مثال ١

إذا كانت $A = \{2,5,6,7,10\}$ ، $B = \{2,5,8,9,10\}$ ، أوجد $A \Delta B$.

الحل

$$A \Delta B = \{6,7,8,9\}$$

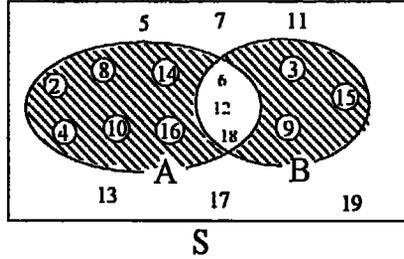
مثال (٢)

لتكن S هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 ، وتكن A هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التي تقبل القسمة على 3. أو وجد مجموعة الفرق المتماثل $A \Delta B$ ومثلها على شكل فن.

الحل

$$A \Delta B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16\}$$

وهذه المجموعة هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 وتكن A هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 ، 20 التي تقبل القسمة على 2 ولا تقبل القسمة على 3 أو تقبل القسمة على 3 ولا تقبل القسمة على 2 (أنظر شكل 1-11).



شكل 1-11

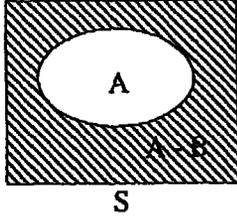
١-٩-٥ المكمل The Complement

المجموعة المكمل A' لأي مجموعة A هي المجموعة التي تحتوي جميع عناصر المجموعة الشاملة التي لا تنتمي إلى A . أي أن:

$$A' = \{x : x \in S, x \notin A\}$$

حيث S المجموعة الشاملة. أي أن:

$$A' = S - A$$



شكل ١ - ١٢

(انظر شكل ١ - ١٢).

مثال (١)

لتكن S هي مجموعة الحروف الإنجليزية ولتكن A مجموعة الحروف المتحركة.
أى:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

فإن المجموعة المكملة هي مجموعة الحروف الساكنة:

$$A' = S - A = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$$

مثال (٢)

إذا كانت S هي مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، 20 ، وكانت A هي مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، 20 ، التي تقبل القسمة على 2 فإن:

$$A' = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

تمثل مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، 20 ، التي لا تقبل القسمة على 2. وإذا

كانت B هي مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، 20 ، التي تقبل القسمة على 3

فإن:

$$B' = \{2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$$

تمثل مجموعة الأعداد المحصورة بين ١ ، 20 ، التي لا تقبل القسمة على 3.

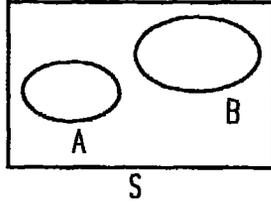
١.-١ عدد عناصر مجموعة Number of Elements in a Set

إذا كانت المجموعة A تحتوي عددا محدودا من العناصر فإن عدد هذه العناصر يرمز له بالرمز $\#(A)$ ؛ وتوجد قواعد تساعد في معرفة عدد عناصر المجموعات المركبة وهي:

(أ) إذا كانت A ، B متباعدتين فإن:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

(انظر شكل ١٣-١).

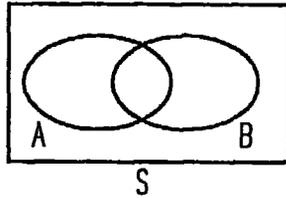


شكل ١٣-١

(ب) إذا كانت A ، B متقاطعتين فإن:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

(انظر شكل ١٤-١).



شكل ١٤-١

يتضح من شكل ١٤-١ أننا إذا أخذنا $\#(A) + \#(B)$ فإننا نكون قد حسبنا

عدد العناصر في المنطقة التي تمثل $A \cap B$ مرتين. لذا يجب أن

نطرح $\#(A \cap B)$.

مثال (١)

لدينا فصل من الطلاب منهم ٣٠ يدرسون اللغة الانجليزية كلغة أجنبية أولى ،
١٢ يدرسون اللغة الفرنسية كلغه أجنبيه أولى. كم طالبا في هذا الفصل
إذا علمت أن اللغات الأجنبية الأولى المتاحة في المدرسة هي الإنجليزية
والألمانية فقط، وأن كل طالب يدرس لغة أجنبية واحدة؟

الحل

لتكن E هي مجموعة الطلاب الذين يدرسون الانجليزية كلغة أجنبية أولى، F
بمجموعة الطلاب الذين يدرسون الفرنسية كلغة اجنبية أولى. إذن $\#(E) = 30$ ،
 $\#(F) = 12$.

وحيث أن $E \cap F = \phi$ ، إذن عدد طلاب الفصل هو:

$$\#(E \cup F) = \#(E) + \#(F) = 30 + 12 = 42$$

مثال (٢)

في مكتب للترجمة وجد أن عدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية على الأقل
يساوى ٩، وعدد الذين يجيدون الترجمة للفرنسية على الأقل يساوى ٦. فإذا
كان العدد الكلى للمتترجمين يساوى ١٢، أوجد عدد الذين يجيدون الترجمة
للغتين معا وعدد الذين يجيدون الترجمة للانجليزية فقط وعدد الذين يجيدون
الترجمة للفرنسية فقط.

الحل

لتكن E مجموعة الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية ، F مجموعة الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية . إذن عدد الذين يجيدون الترجمة للغتين معا هو :

$$\#(E \cap F) = \#(E) + \#(F) - \#(E \cup F) = 9 + 6 - 12 = 3$$

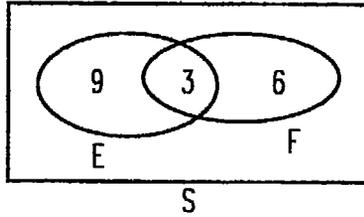
وعدد المترجمين للغة الإنجليزية فقط هو :

$$\#(E - F) = \#(E) - \#(E \cap F) = 9 - 3 = 6$$

وعدد المترجمين للغة الفرنسية فقط هو :

$$\#(F - E) = \#(F) - \#(E \cap F) = 6 - 3 = 3$$

(أنظر شكل ١٥-١).

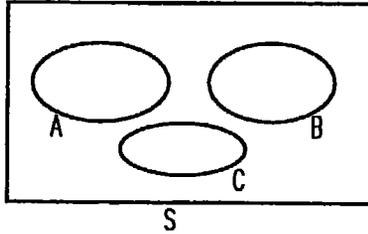


شكل ١٥-١

(ج) إذا كانت A ، B ، C متباعدة مثنى مثنى فإن :

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C)$$

(أنظر شكل ١٦-١).



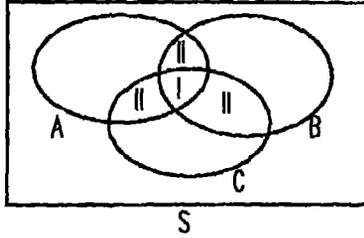
شكل ١٦-١

(د) إذا كانت A ، B ، C متقاطعة فإن:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C)$$

$$- \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

(أنظر شكل ١٧-١).



شكل ١٧-١

من الشكل يتضح أننا إذا أخذنا $\#(A) + \#(B) + \#(C)$ فإننا نكون قد حسبنا عدد العناصر في المناطق II مرتين، وعدد العناصر في المنطقة I التي تمثل $A \cap B \cap C$ ثلاث مرات. فإذا طرحنا $\#(A \cap B) + \#(B \cap C) + \#(A \cap C)$ فإننا نكون قد حسبنا عدد العناصر في كل منطقة مرة واحدة وشطبنا عدد العناصر في المنطقة I التي تمثل $A \cap B \cap C$. لذا يجب أن نضيف العدد $\#(A \cap B \cap C)$.

مثال (٣)

في مكتب للترجمة وجد أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل يساوي ٣٠، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية على الأقل يساوي ٢٠، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية على الأقل يساوي ٢٥. فإذا علمت أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والألمانية على الأقل يساوي ٨، وعدد المترجمين الذين يجيدون

الترجمة للغتين الألمانية والفرنسية على الأقل يساوي ٦ ، وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والفرنسية على الأقل يساوي ١٠ ، عدد الذين يجيدون الترجمة للغات الثلاث يساوي ٥ ؛ فما هو العدد الكلي للمترجمين ؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط ؟ وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين دون الثالثة؟

الحل

نفرض أن مجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية على الأقل هي E ومجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية على الأقل هي G ومجموعة المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية على الأقل هي F.

$$\#(F) = 25, \#(G) = 20, \#(E) = 30 \quad \therefore$$

$$\#(E \cap G \cap F) = 5, \#(E \cap G) = 8, \#(E \cap F) = 10, \#(G \cap F) = 6,$$

إذن العدد الكلي للمترجمين هو:

$$\#(E \cup G \cup F) = 30 + 20 + 25 - 8 - 10 - 6 + 5 = 56$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والألمانية دون الفرنسية هو:

$$\#(E \cap G) - \#(E \cap G \cap F) = 8 - 5 = 3$$

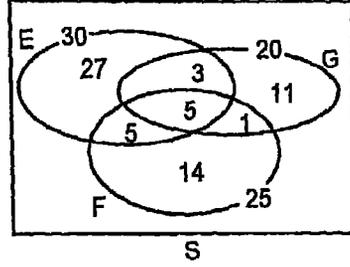
وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الإنجليزية والفرنسية دون الألمانية هو:

$$\#(E \cap F) - \#(E \cap G \cap F) = 10 - 5 = 5$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين الألمانية والفرنسية دون الإنجليزية هو:

$$\#(G \cap F) - \#(E \cap G \cap F) = 6 - 5 = 1$$

(أنظر شكل ١٨-١).



شكل ١٨-١

من الشكل يتضح أن عدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الإنجليزية فقط هو:

$$30 - 3 - 5 - 5 = 27$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الألمانية فقط هو:

$$20 - 3 - 1 - 5 = 11$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة الفرنسية فقط هو:

$$25 - 5 - 1 - 5 = 14$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغة واحدة فقط هو:

$$27 + 11 + 14 = 52$$

وعدد المترجمين الذين يجيدون الترجمة للغتين دون الثالثة هو:

$$3 + 5 + 1 = 9$$

مثال (٤)

فرقة موسيقية ٤٢ ١٤ عازفا. وجد أن عدد العازفين على آلات وترية على الأقل يساوي ٣١ وعدد العازفين على آلات نفخ على الأقل يساوي ٢٥ وعدد العازفين على آلات إيقاع على الأقل يساوي ٢٠ ، وأن عدد العازفين الذين يمكنهم العزف على آلات وترية وإيقاع على الأقل يساوي عدد العازفين

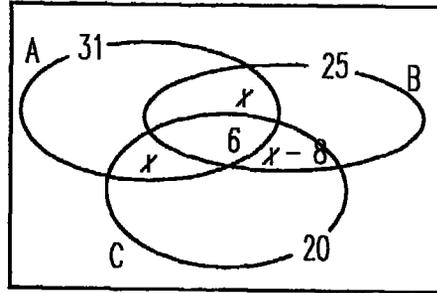
الذين يمكنهم العزف على آلات وترية ونفخ على الأقل وكل منهما يزيد بمقدار ٨ عن عدد العازفين الذين يمكنهم العزف على آلات نفخ وإيقاع على الأقل. فإذا كان عدد العازفين الذين يعزفون على الثلاث أنواع معا يساوي ٦ أوجد:

(أ) عدد العازفين الذين يعزفون على نوع واحد من الآلات دون غيره.

(ب) عدد العازفين الذين يعزفون على نوعين من الآلات فقط.

الحل

نفرض مجموعة العازفين على آلات وترية على الأقل A ومجموعة العازفين على آلات نفخ على الأقل B ومجموعة العازفين على آلات إيقاع على الأقل C. فإذا فرضنا أن عدد العازفين على آلات وترية وإيقاع دون النفخ يساوي x . فإن عدد العازفين على آلات وترية ونفخ دون الإيقاع يساوي x . وعدد العازفين على آلات نفخ وإيقاع دون الوترية يساوي $x - 8$ (أنظر شكل ١٩-١).



3

شكل ١٩-١

باستخدام القاعدة (د) نجد أن:

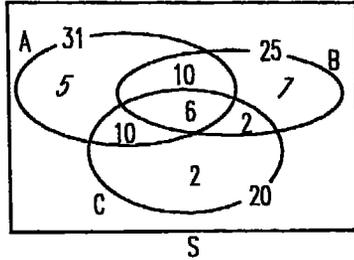
$$42 = 31 + 25 + 20 - (x + 6) - (x + 6) - (x - 8 + 6) + 6$$

$$\therefore 42 = 72 - 3x$$

$$\therefore 3x = 30$$

$$\therefore x = 10$$

وبالتعويض عن تلك القيمة فإننا نحصل على شكل ١ - ٢٠.



شكل ١ - ٢٠

من الشكل يتضح أن عدد الذين يعزفون على نوع واحد فقط من الآلات هو:

$$5 + 7 + 2 = 14$$

وعدد الذين يعزفون على نوعين من الآلات فقط هو:

$$10 + 10 + 2 = 22$$

مثال (٥)

يورد متعهد للصحافة لندائرة من الدوائر الحكومية النسخ الآتية يوميا:

٣٧ نسخة من جريدة "الأهرام"، ٣٦ نسخة من جريدة "الأخبار"، ٣٠

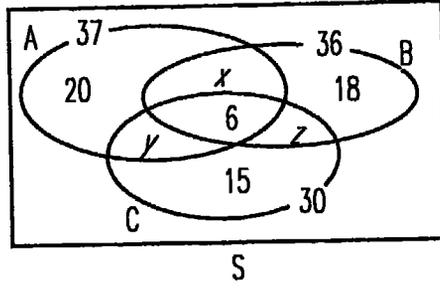
نسخة من جريدة "الجمهورية". أجرى إحصاء عن موظفي الدائرة فوجد أن

٢٠ موظفا يقرأون "الأهرام" فقط، ١٨ موظفا يقرأون "الأخبار" فقط،

١٥ موظفا يقرأون "الجمهورية" فقط، ٦ موظفين يقرأون الصحف الثلاث.

أوجد عدد الذين يقرأون صحيفتين دون الثالثة وعدد موظفي الدائرة.

الحل



شكل ١ - ٢١

من الشكل نجد أن:

$$x + y + 6 + 20 = 37 ,$$

$$x + z + 6 + 18 = 36 ,$$

$$y + z + 6 + 15 = 30.$$

إذن:

$$x + y = 11 \quad (1),$$

$$x + z = 9 \quad (2),$$

$$y + z = 12 \quad (3).$$

من المعادلتين (1) ، (2) نستنتج أن:

$$y - z = 2 \quad (4)$$

من المعادلتين (3) ، (4) نستنتج أن:

$$x = 7 , z = 5$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن:

$$y = 4$$

إذن عدد الذين يقرأون صحيفتين دون الثالثة يساوي:

$$x + y + z = 16$$

وعدد موظفي الدائرة يساوي:

$$20 + 18 + 15 + 16 + 6 = 75$$

١ - ١١ جبر المجموعات Algebra of Sets

تتبع المجموعات قوانين جبرية اكتشفها العالم الرياضى Bool. من هذه القوانين:

* قانونا الدمج *Associative laws*

$$\underline{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}, \quad \underline{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$$

* قانونا الإبدال *Commutative laws*

$$\underline{B \cup A = A \cup B}, \quad \underline{B \cap A = A \cap B}$$

* قوانين التوزيع *Distributive laws*

$$\underline{(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)}, \quad \underline{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

$$\underline{(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)}, \quad \underline{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

* قانونا العقم (اللائق) *Idempotence Laws*

$$\underline{A \cup A = A}, \quad \underline{A \cap A = A}$$

* قانونا الإمتصاص *Absorption Laws*

$$\underline{A \cap (A \cup C) = A}, \quad \underline{A \cup (A \cap C) = A}$$

* قوانين الإكمال *Complementation laws*

$$\underline{A \cup A' = S}, \quad \underline{A \cap A' = \phi}, \quad \underline{(A')' = A}$$

* قانونا دي مورجان *De Morgan's Laws*

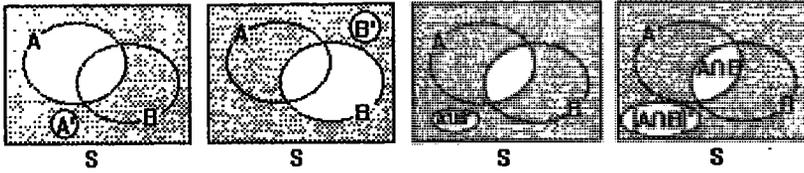
$$\underline{(A \cup B)' = A' \cap B'}, \quad \underline{(A \cap B)' = A' \cup B'}$$

* قوانين S, ϕ

$$\frac{\phi \cup A = A}{S \cup A = S}, \frac{\phi \cap A = \phi}{S \cap A = A}, \frac{\phi' = S}{\phi \cup A = A}, \frac{s' = \phi}{\phi \cap A = \phi}$$

هذا، ويمكن تصور القوانين السابقة برسم أشكال فن؛ فمثلا قانون دي

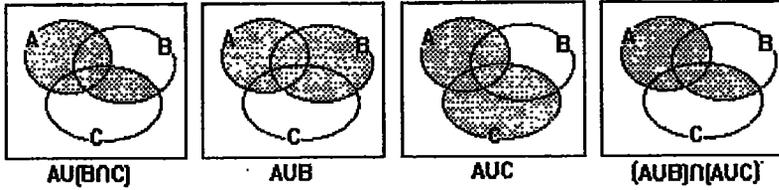
مورجان $(A \cap B)' = A' \cup B'$ يمكن تصوره بالشكل ٢٢-١:



شكل ٢٢ - ١

وقانون التوزيع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ يمكن تصوره

بالشكل (١ - ٢٣):



شكل ٢٣ - ١

غير أن هذا التصور لا يعتبر إثباتا للقوانين ولا يفنى عنه. وتوجد طرق عديدة للإثبات منها طريقة جداول الانتماء التي سنشرحها فيما يلي:

١٢-١ جداول الإنتماء Membership Tables

في هذه الجداول توضع قيم الإنتماء للمجموعات المختلفة والمجموعات المشتقة منها جبريا ويثبت قانون ما إذا كانت قيم الإنتماء للطرف الأيسر

مطابقة لقيم الانتماء للطرف الأيمن. وسنضع القيمة 1 إذا كان عنصر ما x ينتمى لمجموعة A والقيمة 0 إذا كانت x لا تنتمى إلى A .

مثال (١)

أثبت قانون دي مورجان:

$$A \cup B = A' \cap B'$$

الحل

نضع قيم انتماء المجموعتين ونستنتج قيم انتماء كل من الطرف الأيسر والطرف الأيمن في جدول كالآتي:

A	B	A'	B'	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

يلاحظ تطابق قيم الانتماء للطرف الأيسر والطرف الأيمن المبيينين في العمودين الأخيرين من الجدول. إذن القانون صحيح.

مثال (٢)

أثبت أن $A - B = A \cap B'$.

الحل

نكون الجدول:

A	B	B'	A - B	A ∩ B'
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين نستنتج أن القانون صحيح.

مثال (٣)

أثبت قانون التوزيع:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

الحل

نضع قيم الانتماء لكل من A ، B ، C ونستنتج قيم الانتماء لكل من الطرف الأيسر والطرف الأيمن كالاتي:

A	B	C	B ∩ C	A ∪ B	A ∪ C	A ∪ (B ∩ C)	(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

نلاحظ تطابق قيم الانتماء للطرف الأيسر والطرف الأيمن المبينين بالعمودين الأخيرين. إذن القانون صحيح.

مثال (٤)

لأى مجموعتين A ، B أثبت أن:

$$(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$$

الحل

نكون جدول الانتماء كالاتى:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$(A \cap B) \subset A$	$A \subset (A \cup B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

نلاحظ من العمودين الثالث والأول من الجدول أنه إذا اتمى أى عنصر إلى $A \cap B$ فإنه يتمى أيضا إلى A . لذا فإن قيم الانتماء فى العمود الخامس كلها 1. ولهذا، يختبر رأس هذا العمود قانونا فى حد ذاته، كذلك بالنسبة للعمود السادس.

مثال (٥)

لأى ثلاث مجموعات A ، B ، C أثبت أن:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

الحل

نكون جدول الانتماء كالاتى:

A	B	C	$B \cup C$	$A - B$	$A - C$	$A - (B \cup C)$	$(A - B) \cap (A - C)$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين يتبع القانون.

مثال (٦)

لأى ثلاث مجموعات A ، B ، C أثبت أن:

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

الحل

نكوّن جدول الانتماء كالاتى:

A	B	C	$A \Delta B$	$B \Delta C$	$(A \Delta B) \Delta C$	$A \Delta (B \Delta C)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين في الجدول نستنتج أن القانون صحيح.

١ - ١٣ عائلات المجموعات Families of Sets

قد نحتاج في بعض التطبيقات أن نعرف مجموعة عناصرها بمجموعات. في هذه الحالة نطلق على تلك المجموعة اسم عائلة (Family - Class).

مثال (١)

لتكن $A_1 = \{1\}$ ، $A_2 = \{1,2\}$ ، $A_3 = \{1,2,3\}$ ، ...
فإن المجموعة:

$$F = \{A_1, A_2, A_3, \dots\} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}$$

هي عائلة مجموعات.

مثال (٢)

لتكن X مجموعة الأشعة الموازية لمحور x ، Y هي مجموعة الأشعة الموازية لمحور y . فإن المجموعة $\mathcal{P}(X,Y) =$ هي عائلة عناصرها المجموعتان X ، Y .

١-١٣-١ مجموعة القوة The Power Set

تعتبر مجموعة القوة من أهم عائلات المجموعات التي يمكن اشتقاقها من مجموعة واحدة. لتكن A مجموعة غير خالية ($A \neq \phi$). المجموعة التي تحتوي كافة مجموعات A الجزئية تسمى مجموعة القوة *the power set* للمجموعة A ويرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(A)$ أو 2^A .

مثال (١)

لتكن $A = \{a\}$. فإن المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هي مجموعتان غير فعليتين هما ϕ ، $\{a\}$. إذن:

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, A\}$$

ونلاحظ هنا أن A تحتوى على عنصر واحد في حين أن $\mathcal{P}(A)$ تحتوى على عنصرين (مجموعتين).

مثال (٢)

لتكن $A = \{a, b\}$. فإن المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هي $\{a\}$ ، $\{b\}$ بالإضافة إلى مجموعتين غير فعليتين وهما ϕ ، A . إذن:

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, A\}$$

ونلاحظ أن عدد عناصر A يساوى 2 وعدد عناصر (مجموعات) $\mathcal{P}(A)$ يساوى 4 أى 2^2 .

مثال (٣)

لتكن $A = \{a, b, c\}$. المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هي $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ ، $\{a, b\}$ ، $\{a, c\}$ ، $\{b, c\}$ بالإضافة إلى مجموعتين غير فعليتين وهما ϕ ، A . إذن:

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

نلاحظ أن عدد عناصر A يساوى 3 وعدد عناصر (مجموعات) $\mathcal{P}(A)$ يساوى 8 أى 2^3 .

نظرية

إذا كان عدد عناصر المجموعة A هو n فإن عدد عناصر $\mathcal{P}(A)$ يساوى 2^n .

البرهان

يمكن أن نمثل العناصر بعدد n من الكرات المرقمة موضوعة داخل كيس يراد وضع كل منها في إحدى خاتين: الأولى (0) وهذه تناظر عدم وجود العنصر في

المجموعة الجزئية) والثانية ١ (وهذه تناظر وجود العنصر في المجموعة الجزئية) مع السماح بوجود أكثر من كرة في خانة واحدة. إذن يمكن وضع كل كرة بطرق عددها n . إذن عدد طرق الاختيار (أى عدد عناصر (A)) يساوى 2^n أى 2 مرفوعة للقوة n . وربما تكون تلك النتيجة سببا في التسمية مجموعة القوة للمجموعة A والتي يرمز إليها أحيانا بالرمز 2^A .

١ - ١٤ تجزىء المجموعات Partitioning of Sets

يقصد بتجزىء مجموعة ما A تقسيمها إلى مجموعات جزئية A_1, A_2, \dots, A_n

تحقق الشرطين الآتيين:

(أ) كل مجموعتين جزئيتين مختلفتين A_i, A_j متباعدتان. أى:

$$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

ويسمى هذا الشرط أحيانا شرط التباعد.

(ب) اتحاد كل المجموعات الجزئية يساوى المجموعة الأصلية A . أى:

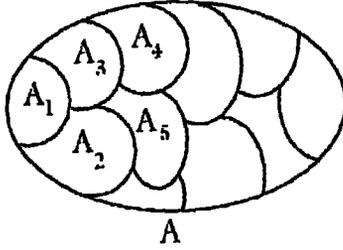
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$$

ويكتب هذا الشرط أحيانا بالصورة:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

ويسمى هذا الشرط أحيانا شرط التكامل.

(أنظر شكل ١-٢٤).



شكل ١-٢٤

مثال (١)

إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ؛ فإن العائلة:

$$\mathcal{F} = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\}\}$$

تعتبر تجزئاً للمجموعة A ، في حين أن العائلة:

$$\mathcal{G} = \{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{e, f\}\}$$

ليست تجزئاً للمجموعة A حيث أنها لا تحقق الشرط الأول وهو شرط التباعد؛ إذ أن:

$$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} \neq \emptyset$$

أيضاً العائلة:

$$\mathcal{H} = \{\{a, b\}, \{d, e\}\}$$

ليست تجزئاً للمجموعة A لعدم تحقق الشرط الثاني وهو شرط التكامل. أما العائلة:

$$\mathcal{I} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$$

فليست تجزئاً لأن كلا الشرطين لا يتحققان.

مثال (٢)

لتكن E هي مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة، O مجموعة الأعداد الفردية الموجبة. فإن العائلة (E, O) تعتبر تجزئاً لمجموعة الأعداد الطبيعية N . من ناحية

أخرى لتكن A هي مجموعة الأعداد الموجبة التي تقبل القسمة على 2، B هي مجموعة الأعداد الموجبة التي تقبل القسمة على 3. فإن العائلة (A, B) لا تعتبر تجزئياً لمجموعة الأعداد الطبيعية N لأنها لا تحقق أيّاً من الشرطين.

مثال (٣)

لتكن I هي الفترة الحقيقية [a, b] ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ بحيث:
 $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

لتكن J_1, J_2, \dots, J_n هي الفترات الجزئية الآتية:

$$J_1 = [a, x_1], J_2 = [x_1, x_2], \dots, J_n = [x_n, b]$$

ولتكن K_1, K_2, \dots, K_n هي الفترات الجزئية الآتية:

$$K_1 = (a, x_1), K_2 = (x_1, x_2), \dots, K_n = (x_n, b)$$

ولتكن I_1, I_2, \dots, I_n هي الفترات الجزئية الآتية:

$$I_1 = [a, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_n, b]$$

أى من العائلات:

$$\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}, \mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}, \mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$$

تجزئ للفترة I؟ لماذا؟

الحل

العائلة \mathcal{J} ليست تجزئياً للفترة I حيث أن شرط التباعد غير متحقق؛ فمثلاً:

$$J_1 \cap J_2 = \{x_1\} \neq \emptyset$$

كذلك العائلة \mathcal{K} ليست تجزئياً للفترة I حيث أن شرط التكامل غير متحقق

؛ إذ أن:

$$K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n = I - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أما العائلة \mathcal{I} فهي تجزئ للفترة I إذ أنها تحقق الشرطين معاً.

١-١٤-١ تكرير التجزىء Refinement of Partitioning

بديهى أننا يمكن أن نعرف أكثر من تجزىء لمجموعة واحدة A .
يسمى التجزىء $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ تكريراً *Refinement* للتجزىء
 $\mathcal{Q} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ إذا كانت كل مجموعة جزئية A_i في \mathcal{Q} هى أيضاً
مجموعة جزئية من مجموعة ما $A_j \in \mathcal{P}$.

مثال

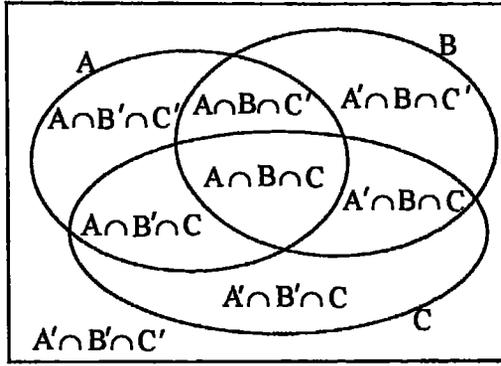
في المثال الأول يعتبر التجزىء $\mathcal{P} = \{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$ تكريراً
للتجزىء $\mathcal{Q} = \{\{a,b,c\}, \{d,e\}, \{f\}\}$ في حين أن التجزىء
 $\mathcal{R} = \{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{e,f\}\}$ ليس كذلك (لماذا؟).

١٥-١ المجموعات الصغرى Minsets

لتكن A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة شاملة S . لنأخذ
المجموعات الجزئية المكونة من العائلة $\mathcal{G} = \{A, B, C\}$:

$$\begin{aligned} & (A \cap B \cap C); \\ & (A' \cap B \cap C), (A \cap B' \cap C), (A \cap B \cap C'); \\ & (A \cap B' \cap C'), (A' \cap B \cap C'), (A' \cap B' \cap C); \\ & (A' \cap B' \cap C') \end{aligned}$$

وعدها ثمان أى 2^3 . كل من هذه المجموعات الثمان تسمى
مجموعة صغرى مولدة بالعائلة \mathcal{G} *a minset generated by*. هذه
المجموعات الصغرى متباعدة مثنى مثنى وهى أيضاً شاملة كما
يتبين من شكل ١-٢٥.



S

شكل ١-٢٥

إذن فإن العائلة:

$$\mathcal{M} = \{(A \cap B \cap C), (A \cap B \cap C'), (A \cap B' \cap C), (A \cap B' \cap C'), (A' \cap B \cap C), (A' \cap B \cap C'), (A' \cap B' \cap C), (A' \cap B' \cap C')\}$$

تمثل تجزئاً للمجموعة S.

وبوجه عام لتكن عائلة مجموعات جزئية من

مجموعة شاملة S. أي مجموعة بالصورة $\bigcap_{i=1}^n \hat{A}_i$ ، حيث \hat{A}_i هي A_i أو

مكملتها A'_i تسمى \mathcal{M} وعددها يساوي 2^n .

سنرمز للمجموعة الصغرى $\bigcap_{i=1}^n \hat{A}_i$ بالرمز $M_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n}$ حيث:

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \hat{A}_i = A_i \\ 0, & \hat{A}_i = A'_i \end{cases}$$

فمثلاً:

$$M_{11\dots1\dots1} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots \cap A_n,$$

$$M_{11\dots0\dots1} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A'_i \cap \dots \cap A_n$$

نظرية

العائلة:

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \hat{A}_i \right\}$$

هي تجزىء للمجموعة الشاملة S.

البرهان

يكفى أن نثبت أن أى عنصر من عناصر S ينتمى إلى واحدة بالضبط من المجموعات الصغرى. أى عنصر $x \in S$ إما أن ينتمى إلى A_1 أو إلى مكملتها A_1' . وأيضا نفس العنصر x إما أن ينتمى إلى A_2 أو إلى مكملتها A_2' ، ... وهكذا. وبذلك فإن العنصر x لابد أن ينتمى إلى إحدى المجموعات الصغرى المولدة بالمجموعة $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

إذن فإن العائلة \mathcal{A} شاملة (١)

إذا كانت T تقاطع مجموعتين صغريين، فإنه توجد i بحيث تكون T محتواه داخل كل من A_i ، A_i' أى داخل ϕ .

إذن فإن العائلة \mathcal{A} متباعدة مثنى مثنى (٢)

من (١)، (٢) ينتج المطلوب.

١٦-١ المجموعات الكبرى Maxsets

لتكن $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ عائلة مجموعات جزئية من مجموعة شاملة

S. أى مجموعة بالصورة $\bigcup_{i=1}^n \hat{A}_i$ ، حيث \hat{A}_i هى A_i أو مكملتها A_i' تسمى

مجموعة كبرى مولدة بالعائلة \mathcal{A} .

وعلى النقيض من عائلة المجموعات الصغرى فإن عائلة جميع المجموعات الكبرى المولدة بالعائلة $\mathcal{P}(S)$ لا تكون تجزيفا للمجموعة الشاملة S.

تمارين (١)

١. إذا كانت:

$$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, X = \{1,2,3,4,5\}, Y = \{2,3,6,8\}$$

$$Z = \{3,5,6,7\} \text{ أوجد:}$$

$X \cap Z$ (ب)	X' (أ)
$X \cup Y$ (د)	$(X \cap Z)'$ (ج)
$X \cap Y'$ (و)	$Y - Z$ (هـ)
$Y \cap X'$ (ح)	$Z \cup (Y - Z)$ (ز)
$(X - Y) \cap Y$ (ى)	$X \cup Z'$ (ط)
$(X \cap Z) \cup (X \cap Z)$ (ل)	$(X - Y)' - X$ (ك)
$\mathcal{P}(Y)$ (ن)	$Y' \Delta X$ (م)

٢. لأي مجموعتين A ، B أثبت أن:

$$A - B' = B - A' \quad (أ)$$

$$A' - B = A' \cap B' = B' - A \quad (ب)$$

$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B \quad (ج)$$

$$A = (A \cap B) \cup (A - B') \quad (د)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A' \cup B') \quad (هـ)$$

٣. لأي ثلاث مجموعات A ، B ، C أثبت صحة القوانين الآتية:

$$A \cap (B \cap C)' = (A - B) \cup (A - C) \quad (أ)$$

$$A \cup (B \cup C)' = (A \cup B)' \cap (A \cup C)' \quad (ب)$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad (ج)$$

$$(A \cap B) \cup (A' \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A' \cap C) \quad (د)$$

$$[(A \cup B)' \cup (A' \cap (B \cup C)')] = (A' \cup B) \cap (A \cup B)' \cap (A \cup C) \quad (هـ)$$

٤. عشرون مريضا ظهرت عليهم أعراض المرض x ، ثلاثون ظهرت عليهم أعراض المرض y ، خمسة ظهرت عليهم أعراض كلا المرضين. أوجد عدد المرضى.

٥. في حفل استقبال لمائة شخص وجد أن:

١٠ شربوا عصير البرتقال فقط، ٣٠ شربوا عصير الليمون فقط، ١٥ شربوا مياه غازية فقط، ٨ شربوا عصير البرتقال وعصير الليمون، ٥ شربوا عصير البرتقال ومياه غازية، ٦ شربوا عصير الليمون ومياه غازية، ٤ شربوا الأنواع الثلاثة. بفرض أن الشارب لا يكرر الشرب من نوع واحد أوجد:
عدد كؤوس عصير البرتقال، عدد كؤوس عصير الليمون، عدد زجاجات المياه الغازية، عدد الذين لم يتناولوا أى مشروبات.

٦. في عينة مكونة من ٥٧ طالبا وجد أن ٣٦ طالب يلعبون كرة القدم، ٣٠ يلعبون كرة السلة، ٢٥ يلعبون التنس، ٦ طلاب يلعبون الثلاثة ألعاب. فإذا كان عدد الطلبة الذين يلعبون كرة القدم والسلة يساوي عدد الطلبة الذين يلعبون القدم والتنس، عدد الطلبة الذين يلعبون السله والتنس يساوي نصف عدد الطلبة الذين يلعبون كره القدم والسلة أوجد عدد الطلاب الذين يلعبون كره القدم فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون كره السلة فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون التنس فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون لعه واحده فقط وعدد الطلاب الذين يلعبون لعبتين فقط.
٧. يتكون مجلس الأمن من ١٥ دولة منها خمس دائمة: الولايات المتحدة الأمريكية - روسيا (الائتحد السوفيتي سابقا) - المملكة المتحدة - فرنسا - الصين؛ وهذه الدول لها حق الإعتراض على أى قرار (الفيتو) ؛ ١٠ دول بالتناوب. فإذا كان أى اقتراح ينجح إذا حصل على ٩ أصوات وأرادت دولة تكوين "مجموعة رابحة" لإنجاح قرار ما فماذا يكون تشكيل تلك المجموعة؟
٨. أكتب عائلة القوة للمجموعة $A = \{a, b, c, d\}$. هل تعتبر عائلة القوة $\mathcal{P}(A)$ تجزيفا للمجموعة A ؟ لماذا؟

الباب الثاني

مقدمة في المنطق الرياضي

AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL

مقدمة ١-٢

يرجع الفضل في إرساء قواعد المنطق الرياضي للعالم البريطاني جورج بول (١٨١٥-١٨٦٤) الذي نشأ في مقاطعة لانكشاير وقضى معظم سنوات إنتاجه العلمي في أيرلندا. وكان من أعظم اكتشافاته في منتصف القرن التاسع عشر استخدام الرموز الرياضية في المنطق بالصورة التي نراه عليها اليوم مما حول المنطق من علم نظري قابل للجدل إلى علم تام يخضع لأصول وقواعد رياضية. وفي القرن العشرين كان جون مكارثي أول من اقترح استخدام المنطق الرياضي في تمثيل عمليات الاستدلال واتخاذ القرارات، وذلك في بحث قدمه عام ١٩٥٨. وسنبداً بدراسة ما يُسمى بحساب القضايا *propositional calculus* ثم نكمل تلك الدراسة بشرح ما يسمى بحساب المحمول *predicate calculus*.

التقارير Statements ٢-٢

التقرير هو جملة خبرية قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة ولكنها لا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة في آن واحد. وسنعطي هنا بعض الأمثلة:

(أ) مصر بلد عربي.

(ب) السماء تمطر الآن.

(د) جميع المثلثات حادة الزوايا.

(هـ) مجموعة الأعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

كل جملة من الجمل السابقة تمثل تقريرا قد يكون صحيحا كما في (أ) ، (هـ) وقد يكون خاطئا كما في (ج) ، (د) ، (و) وقد يحتمل الصواب أو الخطأ كما في (ب). وهناك جمل لا تعتبر تقارير مثل:

(ز) إذهب للمحاضرة (أمر).

(ح) كم عدد عناصر المجموعة $A = \{1,2,5,8\}$ ؟ (إستفهام).

(ط) ياعمرؤ (نداء).

(ى) ما أجمل الزهور ا (تعجب).

وإذا كان التقرير يحمل خبرا واحدا سمي تقريرا بسيطا *simple statement* ؛ أما إذا كان مركبا من عدة تقارير بسيطة فيسمى تقريرا مركبا *complex statement* ويلاحظ أن التقارير (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) كلها بسيطة. وسنبين فيما يلي كيفية تكوين وقراءة وتحليل تقارير مركبة.

٣-٢ قيم الحقيقة Truth Values

سنرمز للتقارير البسيطة بأحد الحروف p, q, r, \dots ؛ وإذا كان التقرير صحيحا أعطى القيمة 1 أما إذا كان خاطئا فيعطى القيمة 0 وتسمى هاتان القيمتان قيمتي الحقيقة *truth values* ؛ فمثلا ليكن p هو التقرير $2 > \sqrt{3}$ وليكن q هو التقرير $2 > \sqrt{5}$ ، فإن قيمتي الحقيقة للتقريرين p ، q تعطى بالجدول الآتي:

p	q
1	0

ويسمى جدول الحقيقة *truth table*.

٤-٢ النفي Negation

لكي ننفي التقرير p نستخدم الرمز " $\sim p$ " ويقرأ "ليس p " ومن الواضح أن نفي التقرير p هو تقرير قيمة حقيقته مخالفة لقيمة حقيقة التقرير p . أي أن نفي التقرير يمكن أن يعرف من الجدول الآتي:

p	$\sim p$
1	0
0	1

وأداه النفي " \sim " هي أداة أحادية، إذ أنها تؤثر على تقرير واحد. سنعرف الآن أدوات ربط ثنائية *Junctors* تربط بين تقريرين:

٥-٢ أداه العطف Conjunction

ليكن p ، q تقريرين. نستطيع أن نكون تقريراً مركباً $p \wedge q$ من p ، q يكون صحيحاً في حالة واحدة فقط وهي إذا كان كل من التقريرين p ، q صحيحاً. ويقرأ التقرير " $p \wedge q$ " " p and q "، ويمكن أن نعرف $p \wedge q$ بالجدول الآتي:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال (١)

ليكن p هو التقرير "مصر بلد عربي"، وليكن q هو التقرير "مصر بلد أفريقي".

إذن $p \wedge q$ هو التقرير "مصر بلد عربي ، مصر بلد أفريقي" أى "مصر بلد عربي أفريقي".

واضح أن قيم الحقيقة للتقارير p ، q ، $p \wedge q$ هي 1، 1، 1 .
مثال (٢)

ليكن p هو التقرير $2 > \sqrt{3}$ وليكن q هو التقرير $2 > \sqrt{5}$. واضح أن قيم الصواب والخطأ للتقارير p ، q ، $p \wedge q$ هي 0 ، 1 ، 0 على الترتيب.

أداة التخيير Disjunction

٦-٢

ليكن p ، q تقريرين. نستطيع أن نكون التقرير المركب $p \vee q$ ويُقرأ " p or q " من التقريرين p ، q ويكون صواباً إذا كان أحد التقريرين أو كلاهما صواباً. أى يكون التقرير $p \vee q$ خطأ فى حالة واحدة وهى إذا كان كلٌّ من التقريرين p ، q خطأ. ويُعرف $p \vee q$ من الجدول الآتى:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

وتسمى أداة الربط " \vee " "أو الشاملة" "*Inclusive or*". هذا، وتوجد أداة ربط أخرى تسمى "أو الاستبعادية" "*Exclusive or*" ويُرمز لها بالرمز " $\underline{\vee}$ " ويكون التقرير $p \underline{\vee} q$ صواباً إذا كان أحد التقريرين p أو q صواباً دون الآخر وتُعرف من خلال الجدول الآتى:

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

مثال (١)

ليكن p هو التقرير: 8 عدد أولي، q هو التقرير: 9 عدد طبيعي. إذا أردنا التعبير عن التقرير: 8 عدد أولي أو 9 عدد طبيعي فإننا نكتب $p \vee q$.

مثال (٢)

في حفلة ما كان مسموحاً للضيف اختيار مشروب واحد "قهوة" أو "شاي". فإذا رمزنا لاختيار أحمد أن يشرب "القهوة" بالرمز p واختيار أحمد أن يشرب "الشاي" بالرمز q فإن العبارة: أحمد اختار أن يشرب قهوة أو شاي يرمز لها بالرمز: $p \vee q$.

٧-٢ تكافؤ تقريرين Equivalence

يتكافؤ تقريران إذا تطابقت قيمتا صوابهما في الجدول. ويرمز للتكافؤ بالرمز \equiv .

مثال (١)

توجد قاعدة منطقية شهيرة وهي "نفي النفي إثبات" ويُعبّر عن تلك القاعدة بالتكافؤ:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

وللبرهنة على صحة هذه القاعدة نكوّن الجدول الآتي:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
1	0	1
0	1	0

يُتضح من الجدول أن العمودين الأول والثالث متطابقان. إذن القاعدة صحيحة.

مثال (٢)

برهن على أن :

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

الحل

نكوّن الجدول الآتي:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج التكافؤ.

مثال (٣)

أثبت أن:

$$p \underline{\vee} q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

الحل

نكوّن الجدول الآتي:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \underline{\vee} q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج التكافؤ .

٨-٢ التقارير الصائبة منطقيا والخطئة منطقيا **Tautology & Contradiction**
إذا احتوى جدول الحقيقة لتقرير ما على القيمة 1 في جميع صفوفه فإننا نقول
أن هذا التقرير صائب منطقيا *Tautology* أما التقرير الذي يحتوي جدول
الصواب والخطأ له على القيمة 0 في جميع صفوفه فيقال أنه تقرير خاطئ منطقيا

.*Contradiction*

مثال (١)

التقرير $p \vee \sim p$ تقرير صائب منطقيا و جدول حقيقته كالاتي:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

مثال (٢)

التقرير $p \wedge \sim p$ تقرير خاطئ منطقيا و جدول حقيقته كالاتي:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

هذا، وسنرمز للتقرير الصائب منطقيا بالرمز T ، أما التقرير الخاطئ منطقيا
فسنرمز له بالرمز F ؛ وإذا كان التقرير غير صائب منطقيا وغير خاطئ
منطقيا فانه يكون غير معين. مثال ذلك التقارير $p \wedge q$ ، $p \vee q$ ، $p \wedge \sim q$

....

٩-٢ قوانين المنطق Logical Laws

لعلنا لاحظنا أن التكافؤ في المنطق يناظر التساوي في المجموعات، وأن النفي في المنطق يناظر التكميل في المجموعات، وأن أداة العطف "∧" تناظر التقاطع "∩" وأن أداة التخيير "∨" تناظر الاتحاد "∪"، وأن التقرير الصائب منطقيا "T" يناظر المجموعة الشاملة "S"، كما أن التقرير الخاطئ منطقيا "F" يناظر المجموعة الخالية "∅"؛ ولذلك فإن للمنطق الرياضي قوانين تشابه تماما تلك الموجودة في المجموعات وهذه القوانين هي:

(أ) قانونا الدمج

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad , \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(ب) قانونا الإبدال

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad , \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

(ج) قوانين التوزيع

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad , \quad (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad , \quad (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

(د) قانونا (العقم) اللانمو

$$p \wedge p \equiv p \quad , \quad p \vee p \equiv p$$

(هـ) قانونا الامتصاص

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad , \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

(و) قوانين النفي

$$\sim(\sim p) \equiv p \quad , \quad p \wedge \sim p \equiv F \quad , \quad p \vee \sim p \equiv T$$

(ز) قانونا دي مورجان

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad , \quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

(ح) قوانين T ، F

$$p \wedge T \equiv p \quad , \quad p \wedge F \equiv F \quad , \quad p \vee T \equiv T \quad , \quad p \vee F \equiv p \quad , \quad \sim T \equiv F \quad , \quad \sim F \equiv T$$

ونستطيع البرهنة على تلك القوانين باستعمال جداول الحقيقة.

مثال (١)

أثبت قانون التوزيع $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

الحل

نكون جدول الحقيقة الآتى:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

واضح من الجدول أن العمودين الأخيرين متطابقان. إذن القانون صحيح.

مثال (٢)

أثبت أن:

$$\sim [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv p \underline{\vee} q$$

الحل

يمكن إثبات التكافؤ عن طريق جدول الحقيقة كالاتى:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	$\sim [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$	$p \underline{\vee} q$
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج التكافؤ المطلوب.

وفضلا عن ذلك يمكن إثبات التكافؤ باستخدام قوانين المنطق كالاتى:

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) &\equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p)] \wedge [(p \wedge q) \vee (\sim q)] \\
 &\quad \text{(قوانين التوزيع)} \\
 &\equiv [(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)] \wedge [(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q)] \\
 &\quad \text{(قوانين التوزيع)} \\
 &\equiv [T \wedge (q \vee \sim p)] \wedge [(p \vee \sim q) \wedge T] \\
 &\quad \text{(قوانين النفي)} \\
 &\equiv (q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \\
 &\quad \text{(قوانين T ، F)} \\
 \sim [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] &\equiv \sim [(q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)] \\
 &\equiv [\sim (q \vee \sim p)] \vee [\sim (p \vee \sim q)] \\
 &\quad \text{(قوانين دي مورجان)} \\
 &\equiv [\sim q \wedge \sim (\sim p)] \vee [\sim p \wedge \sim (\sim q)] \\
 &\quad \text{(قوانين دي مورجان)} \\
 &\equiv (\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \\
 &\quad \text{(قوانين النفي)} \\
 &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \\
 &\quad \text{(قوانين الإبدال)} \\
 &\equiv p \underline{\vee} q
 \end{aligned}$$

(من التعريف)

١٠-٢ أداة الشرط " \rightarrow " Conditional Junction

التقرير "إذا p فإن q " يسمى تقريراً شرطياً *Conditional statement* ويكتب $p \rightarrow q$ وعندئذ تسمى p المقدمة *antecedent* أو الفرض ويسمى q التالي *consequent* أو النتيجة. وينبغي أن نلاحظ هنا أن " $p \rightarrow q$ " معناه "إذا كان التقرير p صائباً فإن التقرير q يكون صائباً أيضاً". أما إذا كان p خاطئاً فإن q قد يكون صائباً وقد يكون خاطئاً. أى أن التقرير $p \rightarrow q$ يكون خاطئاً في حالة واحدة فقط وهي إذا كان p صائباً ، q خاطئاً.

مثال (١)

"إذا كانت السماء تمطر فإنه يوجد سحب". هذه العبارة يمكن كتابتها رياضياً كالآتي:

ليكن التقرير p هو "السماء تمطر" ، وليكن التقرير q هو "يوجد سحب". إذن العبارة "إذا كانت السماء تمطر فإنه يوجد سحب" تكتب $p \rightarrow q$. وتكون العبارة خاطئة في حالة واحدة فقط وهي إذا كانت السماء تمطر ولا يوجد سحب.

مثال (٢)

قال المرشح للناخبين: "إذا انتخبتموني فسأبنى لكم كوبريا يربط بين شقى البلدة". هذه العبارة يمكن كتابتها رياضياً كالآتي:
ليكن التقرير p هو "انتخبتموني" ، وليكن التقرير q هو "سأبنى لكم كوبريا

يربط بين شقى البلدة". إذن العبارة "إذا انتخبتموى فسأبنى لكم كوبريا يربط بين شقى البلدة" تكذب $p \rightarrow q$. وتكون العبارة خاطئة فى حالة واحدة فقط وهى إذا انتخب المرشح ولم يُن الكوبرى.
مما سبق يتبين أن جدول الحقيقة للتقرير $p \rightarrow q$ هو:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

تموين (١)

أثبت أن التقرير $p \rightarrow q$ يكافئ التقرير $(p \vee q) \wedge (\sim p)$ والذى يكافئ بدوره التقرير $(p \wedge \sim q) -$ وذلك بمقارنة جداول الحقيقة لها.

تموين (٢)

أثبت أن التقرير $p \rightarrow (p \vee q)$ صائب منطقيا.

تموين (٣)

أثبت أن التقرير $p \rightarrow q$ يكافئ التقرير $\sim q \rightarrow \sim p$.

١١-٢ أداة الشرط المزدوج " \leftrightarrow " Bi-directional Conditional Junction

التقرير " p إذا فقط إذا q " يسمى "شرطا مزدوجا" ويكتب " $p \leftrightarrow q$ ".
ويعنى "إذا p فإن q وإذا q فإن p ". لذا فإن التقرير " $p \leftrightarrow q$ " يكون خاطئا إذا اختلفت قيمتا الحقيقة للتقريرين p ، q . إذن فإن جدول الحقيقة للتقرير " $p \leftrightarrow q$ " هو:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

وإذا اتخذنا هذا الجدول كتعريف، فإن:

$$p \leftrightarrow q \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

ويمكن إثبات ذلك عن طريق جداول الحقيقة كالتالي:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

واضح أن العمودين الأخيرين متطابقان. إذن التكافؤ صحيح.

١٢-٢ التضمين Implication

إذا كان التقرير $P \rightarrow Q$ صائبا منطقيا فإنه يسمى تضمينا *implication* ويكتب عندئذ $P \Rightarrow Q$.

مثال (١)

أثبت أن التقرير $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ تضمين.

الحل

نكوّن جدول الحقيقة الآتي:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

يتبين من الجدول أن التقرير $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ صائب منطقيًا وبذلك يكون تضمينًا ويمكن كتابته بالصورة $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.
مثال (٢)

أثبت أن التقرير $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ ليس تضمينًا.
الحل

نكون جدول الحقيقة الآتي:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \wedge q$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

واضح من الجدول أن التقرير $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ غير صائب منطقيًا (لوجود الصفر في العمود الأخير). إذن التقرير ليس تضمينًا. أي أن:

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$$

٢-١٢-١ قاعدة التسلسل المنطقي Chain Rule

قاعدة التسلسل المنطقي *chain rule* هي من أهم قواعد الاستدلال المنطقي *rules of inference* وتنص على أنه إذا أدى التقرير p إلى التقرير q وأدى التقرير q إلى التقرير r فإن التقرير p يؤدي حتما إلى التقرير r . أي أن:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

البرهان

نكون جدول الحقيقة الآتي:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

ومنه نستنتج جدول الحقيقة الآتي:

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1
0	1
0	1
0	1
1	1
0	1
1	1
1	1

من العمود الأخير تتضح القاعدة.

هذا؛ ونستطيع أن نعطي أمثلة من الحياة اليومية على هذه القاعدة؛ فمثلا العبارة: "إذا تحققت العدالة زاد الإنتاج، وإذا زاد الإنتاج عم الرخاء؛ إذن إذا تحققت العدالة عم الرخاء" هي تسلسل منطقي.

١٣-٢ الحجج Arguments

نتعرض في كثير من مناقشاتنا اليومية إلى ما يسمى بـ الحجج *arguments*؛ فالمرافعات في ساحات القضاء، وخطب المرشحين للانتخابات، وإعلانات الصحف والتليفزيون أمثلة من الحجج. ورياضيا فإن أي تقرير مركب بالشكل الآتي:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

يسمى حجة *argument* وتسمى التقارير الأولية p_1, p_2, \dots, p_n التي تكون المقدمة حيثيات *premises*؛ أما التقرير q الذي يكون النتيجة فيسمى الحكم *conclusion*. وتكون الحجة قائمة *valid* إذا كانت صائبة منطقيا وإلا كانت داحضة (زائفة) *fallacious*. هذا، والحجة القائمة التي تكون حيثياتها

كلها صحيحة تسمى مسموعة *sound* ؛ أما الحاجة التي إحدى أو بعض حيثياتها غير صحيحة فتسمى غير مسموعة *unsound*.

مثال (١)

لنأخذ التقرير المركب "إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعار السلع ترتفع. وقد زادت أسعار البترين . إذن فإن أسعار السلع سوف ترتفع" . إذا رمزنا للتقرير البسيط "زادت أسعار البترين" بالرمز p والتقرير البسيط "ارتفعت أسعار السلع" بالرمز q فإن التقرير "إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعار السلع ترتفع" هو $p \rightarrow q$. وبذلك يكون التقرير المركب المذكور هو $p \rightarrow q \wedge (p \rightarrow q)$ وقد أثبتنا قبل ذلك أنه تقرير صائب منطقيا. إذن فهو بحاجة قائمة.

مثال (٢)

لنأخذ التقرير المركب "إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعار السلع ترتفع. وقد ارتفعت أسعار السلع. إذن فلا بد أن أسعار البترين قد ارتفعت" . باستخدام الرموز في المثال (١) فإن هذا التقرير يكتب $p \rightarrow q \wedge (p \rightarrow q)$ وقد أثبتنا قبل ذلك أنه تقرير غير صائب منطقيا. إذن فهو بحاجة زائفة.

مثال (٣)

لنأخذ التقرير المركب "إذا ارتفعت أسعار البترين فإن أسعار السلع ترتفع. ولم ترتفع أسعار البترين. إذن فلا بد أن أسعار السلع لن ترتفع" . باستخدام الرموز في المثال (١) فإن هذا التقرير يكتب $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p) \rightarrow (\sim q)$. لتقرير صحة هذا التقرير منطقيا نكون الجدول الآتي:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \wedge \sim p$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$
1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1

واضح من الجدول أن التقرير $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p) \rightarrow (\sim q)$ غير صائب منطقياً. إذن فهو بحاجة زائفة.

١٤-٢ الأسوار Quantifiers

ليكن $p(x)$ تقريراً يتوقف صوابه على المتغير x . مثل هذا التقرير يسمى جملة مفتوحة *open sentence*؛ فمثلاً إذا كتبنا $x + 2 = 9$ فإن هذا التقرير يكون صحيحاً أو خاطئاً بعد أن نحدد ماهية x ؛ ولذلك لا يجوز بصحة التقرير ما لم يُقرن بأداة أو برمز يحدد المتغير x . هذه الأداة تسمى سور *quantifier* سنعرف فيما يلي اثنين من هذه الأسوار:

١٤-٢-١ سور الوجود The Existential Quantifier

التقرير $(\exists x)(p(x))$ يعني "توجد x بحيث $p(x)$ ". ويكون هذا التقرير المركب صائباً أو خاطئاً.

مثال (١)

التقرير $(\exists x \in \mathbb{N})(x + 4 = 9)$ يقرأ: يوجد عدد طبيعي x بحيث $x + 4 = 9$ وهو تقرير صائب.

مثال (٢)

التقرير $(\exists x \in \mathbb{N}) (x + 9 = 4)$ يُقرأ: يوجد عدد طبيعي x بحيث $x + 9 = 4$ وهو تقرير خاطئ حيث أن x هنا سالبة.

٢-١٤-٢ سور العالمية (الكلية) The Universal Quantifier

التقرير $(\forall x) (p(x))$ يعني " لكل x فإن $p(x)$ ". ويكون هذا التقرير المركب صائبا أو خاطئا.

مثال

التقرير $(\forall x > 0) (x + 1 > 1)$ يُقرأ " لجميع قيم x الموجبة فإن المقدار $x + 1$ يكون أكبر من 1 " وهو تقرير صحيح.

١٥-٢ نفي الجمل التي تحتوي على أسوار Negation of Quantified Sentences

هناك قاعدتان لنفي الجمل التي تحتوي على أسوار. القاعدة الأولى هي:

$$\sim [(\exists x)(p(x))] \equiv [(\forall x)(\sim p(x))]$$

ومعناها: نفي التقرير " توجد x بحيث $p(x)$ " يكافئ التقرير " لكل x فإن $p(x)$ ليس صحيحا ".

والقاعدة الثانية هي:

$$\sim [(\forall x)(p(x))] \equiv [(\exists x)(\sim p(x))]$$

ومعناها: نفي التقرير " لكل x فإن $p(x)$ " يكافئ التقرير " توجد x بحيث لا يكون $p(x)$ صحيحا ".

مثال (١)

التقرير $(\forall x > 0)(x + 1 > 2)$ يعني " لكل x الموجبة فإن $x + 1$ يكون أكبر

من 2 وهو تقرير خاطئ. أى أن التقرير $(\forall x > 0)(x + 1 > 2) \sim$ هو تقرير صائب. ويكافئ هذا أن نكتب: $(\exists x > 0)(\sim(x + 1 > 2))$. أى أنه يكفى أن نجد قيمة واحدة موجبة للمتغير x بحيث يكون التقرير $(x + 1 > 2)$ خاطئاً (واضح أن القيمة $x = 1$ تحقق هذا).

مثال (٢)

التقرير $(\exists x \in \mathbb{N})(x + 7 = 4)$ يقرأ: "يوجد عدد طبيعي x بحيث يكون $x + 7 = 4$ " وهو تقرير خاطئ أى أن نفيه صحيح. ويكافئ ذلك أن نكتب $(\forall x \in \mathbb{N})(\sim(x + 7 = 4))$ ويقرأ: "لكل عدد طبيعي x فإن التقرير $(x + 7 = 4)$ لا يكون صحيحاً".

١٦-٢ المصفوفات المنطقية Logical Matrices

يقصد بالمصفوفات المنطقية المصفوفات التى جميع عناصرها تأخذ إحدى القيمتين 0 أو 1. أى أنها المصفوفات التى صورتها:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, a_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

والعمليات التى تجرى على تلك المصفوفات هى عمليات منطقية تسمى عمليات بول *Boolean Operations* سنعرف منها ثلاث:

١-١٦-٢ الوصل The Join

لتكن $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفتين منطقيتين. تُعرف مصفوفة الوصل *Join matrix* بأنها المصفوفة $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ حيث:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان كل من } a_{ij} \text{ ، } b_{ij} \text{ يساوى } 0 \\ 1, & \text{إذا كان أحد } a_{ij} \text{ أو } b_{ij} \text{ كلاهما يساوى } 1 \end{cases}$$

أى أن:

$$c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$$

ونكتب:

$$C = A \vee B$$

مثال

لتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٢-١٦-٢ The Meet المنطقى

لتكن $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفتين منطقيتين. تُعرف مصفوفة

المنطقى *Meet matrix* بأنها المصفوفة $D = [d_{ij}]_{m \times n}$ حيث:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان كل من } a_{ij} \text{ و } b_{ij} \\ 0, & \text{إلا} \end{cases}$$

يساوى 1

فيما عدا ذلك

أى أن:

$$d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$$

ونكتب:

$$D = A \wedge B$$

مثال

في المثال السابق نجد أن:

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٢-١٦-٣ حاصل الضرب The Product

لتكن $B = [b_{ij}]_{m \times p}$ ، $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ مصفوفتين منطقيتين. تُعرف مصفوفة

الضرب *Product matrix* بأنها المصفوفة $E = [e_{ij}]_{m \times p}$ حيث:

$$e_{ij} = \bigvee_{k=1}^n a_{ik} \wedge b_{kj}$$

ونكتب:

$$E = A \otimes B$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ لتكن:}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$\begin{aligned}
 A \otimes B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\wedge(1\wedge 0)\wedge(0\wedge 1) \\ (0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 0)\wedge(1\wedge 0)\wedge(0\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\wedge(1\wedge 0)\wedge(0\wedge 1) \\ (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\wedge(0\wedge 0)\wedge(1\wedge 1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1\vee 0\vee 0 & 0\vee 1\vee 0 & 0\vee 1\vee 0 & 0\wedge 0\wedge 0 \\ 0\vee 0\vee 0 & 0\vee 1\vee 0 & 0\vee 1\vee 0 & 0\wedge 0\wedge 0 \\ 1\vee 0\vee 0 & 0\vee 1\vee 0 & 0\vee 1\vee 0 & 0\wedge 0\wedge 0 \\ 0\vee 0\vee 1 & 0\vee 0\vee 0 & 0\vee 0\vee 1 & 0\wedge 0\wedge 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

هذا؛ ويكن إثبات القوانين الآتية للمصفوفات المنطقية طالما كانت العمليات المتضمنة

سليمة:

$$\begin{aligned}
 A \wedge B &= B \wedge A & , & \quad A \vee B = B \vee A & \quad (أ) \\
 A \wedge (B \wedge C) &= (A \wedge B) \wedge C & , & \quad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C & \quad (ب) \\
 A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & , & \quad A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) & \quad (ج) \\
 (A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C) & , & \quad (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C) & \\
 & & & \quad A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C & \quad (د)
 \end{aligned}$$

أمثلة متنوعة

مثال (١)

أثبت أن التقرير $p \rightarrow q$ يكون صائبا إذا وفقط إذا كان التقرير $(p \wedge \sim q)$ خاطئا.

الحل

نكون الجدول:

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$\sim [p \wedge \sim q]$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim [p \wedge \sim q]$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

من العمود الأخير يتضح أن $p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$. إذن المطلوب صحيح.

مثال (٢)

أثبت أن $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow p \rightarrow \sim q$.

الحل

نكون الجدول:

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \rightarrow \sim q$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج المطلوب.

مثال (٣)

أثبت أن التقرير $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge \sim p$ خاطئ منطقيا.

الحل

نكون الجدول:

p	q	r	$\sim r$	$\sim p$	$p \vee q$	$q \rightarrow \sim r$	$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (\sim p)$
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0

من العمود الأخير يتضح أن $(p \vee q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge \sim p \equiv F$.

مثال (٤)

أثبت أن:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \\ \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

الحل

نكون الجدول:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge r$	$q \wedge \sim r$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0

ومنه نستنتج الجدول:

$p \wedge q \wedge r$	$p \wedge \sim q \wedge r$	$p \wedge q \wedge \sim r$	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$	L.H.S.	R.H.S.
1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

حيث يمثل العمودان الأخيران الطرفان الأيسر والأيمن من التكافؤ. من تطابق

العمودين الأخيرين ينتج المطلوب.

طريقة أخرى للحل

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) &\equiv ((p \wedge r) \wedge q) \vee ((p \wedge r) \wedge \sim q) \\
 &\text{(قوانين الدمج والإبدال)} \\
 &\equiv (p \wedge r) \wedge (q \vee \sim q) \\
 &\text{(قوانين التوزيع)} \\
 &\equiv (p \wedge r) \wedge T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(قوانين T ، F)} \\ & \equiv p \wedge r \\ & \text{(قوانين T ، F)} \\ (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) & \equiv (p \wedge (q \wedge \sim r)) \vee (\sim p \wedge (q \wedge \sim r)) \\ & \text{(قوانين الدمج والإبدال)} \\ & \equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r) \\ & \text{(قوانين التوزيع)} \\ & \equiv T \wedge (q \wedge \sim r) \\ & \text{(قوانين T ، F)} \\ & \equiv q \wedge \sim r \\ & \text{(قوانين T ، F)} \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \\ \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r) \end{aligned}$$

مثال (٥)

أثبت القاعدة الآتية:

$$\sim [(\forall x)(\exists y)(p(x,y))] \equiv [(\exists x)(\forall y)(\sim p(x,y))]$$

الحل

واضح أن كلا من الطرف الأيمن والأيسر جملة مفتوحة في متغيرين x ، y . إذا

اعتبرنا أن المتغير y ثابت في الجملتين فإن علينا أن نثبت أن:

$$\sim [(\exists x)(p(x, b))] = (\forall x)(\sim p(x, b))$$

وهي نفس القاعدة الأساسية الأولى في نفي الجمل المفتوحة (لاحظ أننا

أسقطنا الأسوار من المتغير y حيث اعتبرناه ثابتاً).

وبالمثل اذا اعتبرنا المتغير x ثابتا فإن علينا أن نثبت أن:

$$\sim (\forall y)(p(a, y)) = (\exists y)(\sim p(a, y))$$

وهي نفس القاعدة الأساسية الثانية:

$$\sim (\forall x)(p(x)) = (\exists x)(\sim p(x))$$

في نفى الجمل المفتوحة (لاحظ أننا أسقطنا الأسوار من المتغير x حيث اعتبرناه ثابتا). إذن القاعدة صحيحة.

مثال (٧)

لأى مجموعتين A, B أثبت أن $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.

الحل

نكوّن جدول الانتماء ونكمّله بعمودين لقيم الحقيقة كالاتي:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$(A \cap B) \subset A$	$A \subset (A \cup B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

نلاحظ من العمودين الثالث والأول من الجدول أنه إذا انتمى العنصر إلى $A \cap B$ فإنه ينتمى أيضا إلى A . لذا فإن قيم الحقيقة في العمود الخامس كلها 1. ولهذا يعتبر رأس هذا العمود قانونا في حد ذاته، وكذلك بالنسبة للعمود السادس.

مثال (٨)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فاوجد كلا من $A \vee B$ ،

$B \otimes A$ ، $A \otimes B$ ، $A \wedge B$

الحل

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \\ 1 \vee 1 & 0 \vee 0 & 0 \vee 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \\ 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 1 \\ 0 \vee 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ٧٠ -

$$\begin{aligned} B \otimes A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 \vee 1 & 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نلاحظ أن $B \otimes A$ لا يساوي $A \otimes B$.

تفسيرين (٢)

١. بين أي من الجمل الآتية تقرير وأيها ليس كذلك:

- (أ) أصلح السيارة.
- (ب) أصلح الميكانيكي السيارة.
- (ج) القمر ظاهر الآن.
- (د) العود من الآلات الوترية.
- (هـ) اللوحة يغلب عليها اللون الأحمر.
- (و) زد من اللون الأصفر في اللوحة.
- (ز) أين مفتاح الخريطة؟
- (ح) كم مقياس الرسم؟
- (ط) الأورج الإلكتروني آلة موسيقية متعددة.
- (ي) $4 + 3 = 8$
- (ك) حل المعادله $7x + 6 = 8$.

(ل) يوجد عدد نسي x بحيث $x + 2 = 6$.

(م) ينبغي وقاية الأطعمة من الفساد.

جزء الجمل الآتية إلى تقارير أولية مبينا أدوات الوصل: .٢

(أ) إذا لمع المعدن فهو ذهب.

(ب) إذا وافق مجلس الشعب على قانون الضرائب فإن العدالة تتحقق
ويزيد الانتاج.

(ج) غير صحيح أن التضخم سينتصر وستزيد البطالة.

(د) إذا كانت النفوس كبارا تعبت في مرادها الأجسام.

(هـ) إذا أمطرت السماء فإنه يوجد سحب.

(و) التعليم الجيد يستلزم مدرسا كفؤا و طالبا مجدا.

(ز) إن الله لا ينظر إلى صوركم ولكن ينظر إلى قلوبكم.

(ح) لا يستقيم الظل والعود أعوج.

(ط) إذا لم يتوفر لى وقت فى الكمبيوتر فلن أتم مشروعى.

(ى) إذا خفت فلا تقل وإن قلت فلا تخف.

عبر عن الجملة الآتية بالرمز: .٣

"إذا زاد دخل الشركة عن خمسين ألف جنيه ولم تزد نسبة الانفاق

عن ٥٠% من الدخل فإنه يمكن تعيين موظفين". هل تعتبر هذه

الجملة محاجة؟

قال المرشح "إذا اتُخبت فسيتم عمل كوبرى يصل بين شقى

البلدة". متى يكون هذا التقرير خاطئا؟ .٤

٥. أى من التقارير الآتية تضمنين؟

(أ) $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$

(ب) $\sim (p \vee q) \rightarrow p$

(ج) $[(p \vee q) \wedge \sim r] \rightarrow p$

(د) $p \rightarrow [(p \wedge q) \wedge \sim r]$

٦. أى من التقارير الآتية تكافؤ؟

(أ) $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$

(ب) $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$

(ج) $(q \wedge \sim p) \leftrightarrow (\sim q \vee p)$

(د) $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \wedge p)$

٧. أثبت صحة كل من القوانين الآتية:

(أ) $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

(ب) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

(ج) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$

(د) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

(هـ) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

(و) $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)]$

٨. أثبت أن كلا من التقارير الآتية صائب منطقيا:

(أ) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \vee q) \vee p$

(ب) $(p \vee q) \wedge [\sim p \wedge (p \vee \sim q)] \wedge (\sim p \vee q)$

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim q)] \rightarrow \quad (\text{ج})$$

$$[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)]$$

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \wedge [\sim p \rightarrow \sim q] \Rightarrow p \quad \text{أثبت أن} \quad .9$$

أثبت أن: .10

$$[(\forall p)(p \vee x) \equiv p] \Rightarrow x \equiv F \quad (\text{أ})$$

$$[(\forall p)(p \wedge x) \equiv p] \Rightarrow x \equiv T \quad (\text{ب})$$

أثبت القاعدة الأتية: .11

$$\sim[(\exists x)(\forall y)(p(x,y))] = [(\forall x)(\exists y)(\sim p(x,y))]$$

12. يراد تشكيل قوة دولية لحفظ السلام في منطقة ما. فإذا رشحت

خمس دول P,Q,R,S,W لتشكيل هذه القوة فجاءت اشتراطات

هذه الدول للاشتراك في هذه القوة كالاتي:

(أ) لا يمكن اشتراك R ، Q مع بعضهما.

(ب) لا يمكن اشتراك S ، Q مع بعضهما.

(ج) لا يمكن اشتراك R ، W مع بعضهما.

(د) اشترطت P ألا تشترك إلا إذا اشتركت W.

(هـ) ضرورة اشتراك P أو Q.

(و) ضرورة اشتراك R أو S.

فماذا يكون تشكيل القوة في ظل تلك الاشتراطات؟

١٣. إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ فاوجد كلا من

$B \otimes A$ ، $A \otimes B$ ، $A \wedge B$ ، $A \vee B$

١٤. أثبت القوانين الآتية:

(أ) $A \wedge B = B \wedge A$ ، $A \vee B = B \vee A$

(ب) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

(ج) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(د) $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

(هـ) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

الباب الثالث

نظرية المفاتيح

SWITCHING THEORY

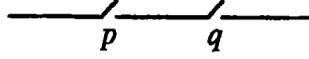
١-٣ تقديم

معلوم أن المفاتيح *switch* هو جهاز يستخدم في توصيل وفصل التيار الكهربى ويكون فى أحد وضعين: الوضع الأول موصل للتيار والوضع الثانى فاصل للتيار. ولا يمكن للمفتاح أن يأخذ الوضعين معا. ستفق على أن نرمز للتقرير المفتاح p موصل بالرمز p وللتقرير المفتاح p غير موصل بالرمز p ؛ وإذا كان المفتاح p موصلا فإنه يأخذ القيمة 1، وعندما يكون p غير موصل فإنه يأخذ القيمة 0.

وقد يتساءل القارى عن فائدة دراسة نظرية المفاتيح لغير المتخصص فى الكهرباء والإلكترونيات! فى الواقع فإن مفهوم المفتاح يمكن أن يمتد ليشمل عددا غير قليل من التطبيقات كما سيتضح فيما بعد.

٢-٣ التوصيل على التوالى *Connection in Series*

يقال لمفتاحين p ، q أنهما موصلان على التوالى عندما يمر التيار الكهربى فى الدائرة عندما يكون كل من المفتاحين p ، q فى وضع التوصيل ولا يمر التيار الكهربى فى أى حالة أخرى (أنظر شكل ١-٣).



شكل ١-٣

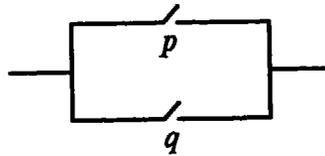
ويكون الجدول الذي يمثله مخرج *output* هذه الدائرة *x* كما يلي:

<i>p</i>	<i>q</i>	<i>x</i>
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

وهذا الجدول يطابق تماماً جدول الحقيقة للتقرير $p \wedge q$ بوضع $p \wedge q = x$. لذا سنرمز للتوصيل على التوالي بالرمز $p \wedge q$ ويقراً "*p* على التوالي مع *q*".

التوصيل على التوازي Connection in Parallel ٣-٣

يقال لفتاحين *p* ، *q* أنهما موصلان على التوازي إذا مر التيار في الدائرة عندما يوصل أحد المفتاحين على الأقل (أنظر شكل ٢-٣).

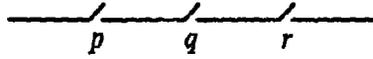


شكل ٢-٣

ويكون الجدول الذي يمثله مخرج *output* هذه الدائرة *x* كما يلي:

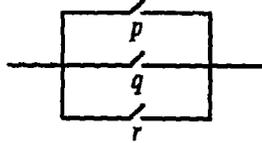
p	q	x
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

وهذا الجدول يطابق تماماً جدول الحقيقة للتقرير $p \vee q$ بوضع $x = p \vee q$. لذا سنرمز للتوصيل على التوازي بالرمز $p \vee q$ ويقرأ " p على التوازي مع q ". وإذا كان لدينا ثلاثة مفاتيح p ، q ، r موصلة على التوالي كما في شكل ٣-٣:



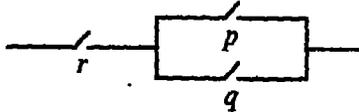
شكل ٣-٣

فإننا نرمز لذلك بالرمز $p \wedge q \wedge r$ (حيث أن قانون الدمج في المنطق قابل للتطبيق)؛ أما إذا كانت المفاتيح p ، q ، r موصلة على التوازي فإننا نرمس لذلك بالرمز $p \vee q \vee r$ (أنظر شكل ٤-٣):



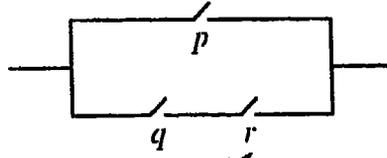
شكل ٤-٣

والتركيبه $p \wedge (q \vee r)$ تمثل الدائرة الآتية (شكل ٥-٣):



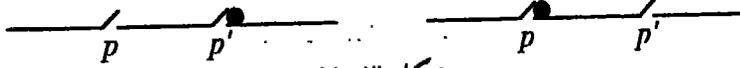
شكل ٥-٣

أما التركيبة $p \vee (q \wedge r)$ فتمثل الدائرة الآتية (شكل ٦-٣):



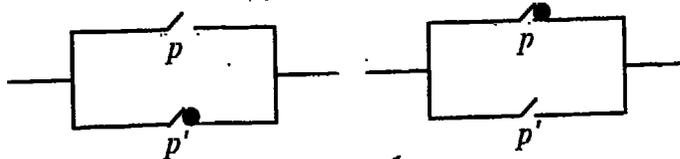
شكل ٦-٣

وفي الدوائر السابقة تعمل المفاتيح p, q, r مستقلة عن بعضها البعض أي أن وضع أحدها لا يؤثر على الآخرين من حيث التوصيل وعدم التوصيل ولكن هذا لا يحدث دائما؛ فقد يحدث أن يكون هناك مفتاحان (أو أكثر) يتصرفان بطريقة واحدة، وفي هذه الحالة سنرمز لهما بنفس الرمز أي p, p ؛ وقد يحدث أن يتصرف مفتاحان بطريقة معاكسة، أي إذا كان أحدهما موصل فالآخر يكون غير موصل والعكس بالعكس، وفي هذه الحالة سنرمز للمفتاحين بالرمزين p, p' ؛ فإذا كان p, p' متصلان على التوالي فإن التيار لا يمكن أن يمر بالدائرة (أنظر شكل ٧-٣):



شكل ٧-٣

[لاحظ أن $(p \wedge p') = F$]. أما إذا كان p, p' موصلان على التوازي فإن التيار دائما يمر بالدائرة (أنظر شكل ٨-٣).



شكل ٨-٣

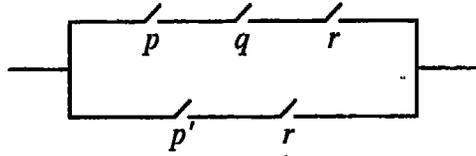
[لاحظ أن $(p \vee p') = T$]

٤-٣ تبسيط الدوائر Simplification of Circuits

يمكن تبسيط الدوائر باستخدام جبر المنطق كما يلي:

مثال (١)

عبر عن الدائرة الآتية (شكل ٩-٣) بالرمز، ثم بسط الدائرة وارسمها بعد تبسيطها:



شكل ٩-٣

الحل

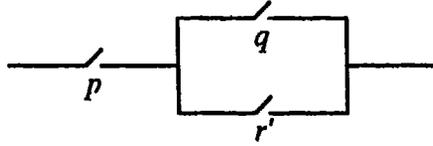
المفاتيح p, q, r موصلة على التوالي والمفتاحان p', r موصّلين على التوالي والمجموعتان p, q, r ؛ p', r موصّلتين على التوازي. إذن المكافئ المنطقي للدائرة هو:

$$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge r')$$

باستخدام جبر المنطق نجد أن:

$$\begin{aligned} (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge r') &\equiv [p \wedge (q \wedge r)] \vee (p \wedge r') && \text{(قانون الدمج)} \\ &\equiv p \wedge [(q \wedge r) \vee r'] && \text{(قانون التوزيع)} \\ &\equiv p \wedge [(q \vee r') \wedge (r \vee r')] && \text{(قانون التوزيع)} \\ &\equiv p \wedge [(q \vee r') \wedge T] && \text{(قانوننا F, T)} \\ &\equiv p \wedge (q \vee r') && \text{(قانوننا T, F)} \end{aligned}$$

أى أن الدائرة الأصلية تكافئ الدائرة الآتية (شكل ١٠-٣):

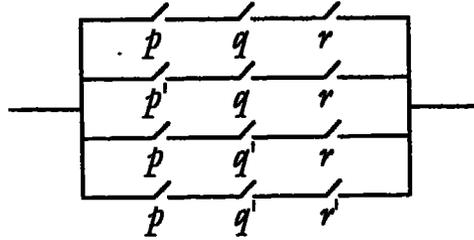


شكل ٣-١٠

والدائرة الأخيرة المكافئة بسيطة واقتصادية حيث أنها تحتوي على ثلاثة مفاتيح بدلا من خمسة.

مثال (٢)

عبر عن الدائرة الآتية (شكل ٣-١١) بالرمز واختزلها إلى دائرة أبسط:



شكل ٣-١١

الحل

الدائرة تكافئ:

$$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r')$$

$$\equiv [(p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r)] \vee [(p \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r)']$$

(قانون الدمج)

$$\equiv [(p \vee p') \wedge (q \wedge r)] \vee [(p \wedge q') \wedge (r \vee r)']$$

(قانون التوزيع)

$$\equiv [T \wedge (q \wedge r)] \vee [(p \wedge q') \wedge T]$$

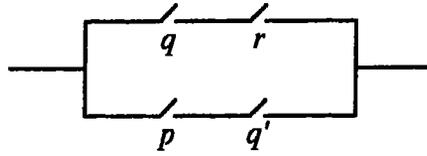
(قانوننا T)

$$\equiv (q \wedge r) \vee (p \wedge q')$$

(قانوننا T)

وبذلك نكون قد اختزلنا الدائرة ذات الإثني عشر مفتاحا إلى الدائرة الآتية

ذات الأربعة مفاتيح (شكل ٣-١٢):



شكل ٣-١٢

٥-٣ استخدام الأشكال الرمزية في نظرية المفاتيح

درج علماء الهندسة الإلكترونية حديثا على استخدام أشكال ترمز إلى توصيل المفاتيح على التوازي والتوالي وهي تسهل كثيرا من العمل وتؤدي إلى اختزال الدوائر وهذه الأشكال هي:

(أ) شكل ٣-١٣ يرمز لتوصيل p ، q على التوالي:



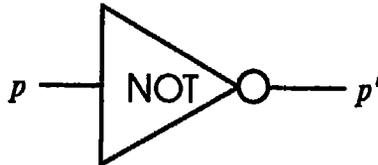
شكل ٣-١٣

(ب) شكل ٣-١٤ يرمز لتوصيل p ، q على التوازي:



شكل ٣-١٤

(ج) شكل ٣-١٥ يرمز لتوصيل p' :



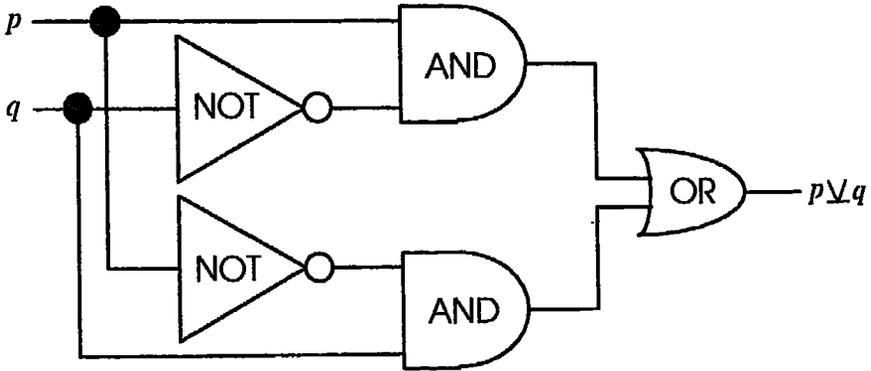
شكل ٣-١٥

(د) شكل ١٦-٣ يرمز إلى $p \nabla q$ أي إلى $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$:



شكل ١٦-٣

أي أننا نستعيض بهذا الشكل عن الدائرة المبينة بشكل ١٧-٣:



شكل ١٧-٣

وقد اصطلح أيضا على استخدام الشكلين الآتيين:

(هـ) الشكل ١٨-٣ يرمز إلى $(p \wedge q)'$:



١٨-٣

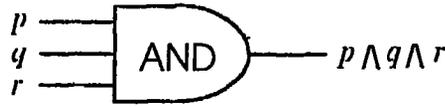
(و) الشكل ١٩-٣ يرمز إلى $(p \vee q)'$:



شكل ١٩-٣

هذا، ويمكن زيادة عدد الأطراف الداخلة للشكل كما يلي:

(ز) الشكل ٢٠-٣ يرمز لتوصيل p ، q ، r على التوالي:



شكل ٢٠-٣

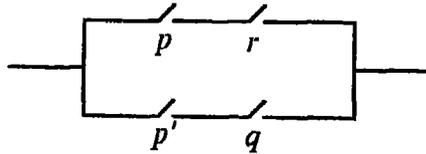
(ح) الشكل ٢١-٣ يرمز لتوصيل p ، q ، r على التوازي:



شكل ٢١-٣

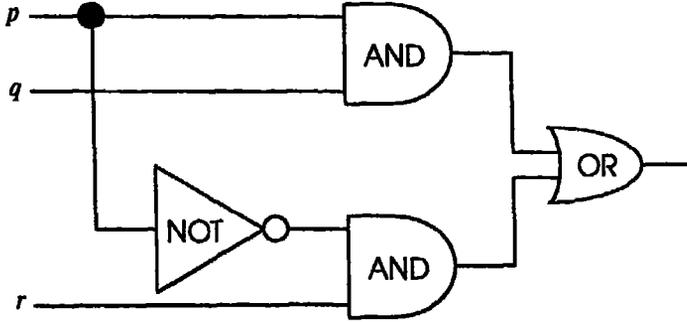
ويمكن أيضا إدماج اثنين أو أكثر من هذه الأشكال في شكل واحد؛ فالدائرة

المبينة بالشكل ٢٢-٣:



شكل ٢٢-٣

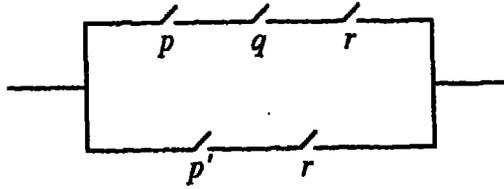
يمكن التعبير عنها بالشكل ٢٣-٣:



شكل ٣-٢٣

مثال (١)

عبر عن الدائرة الآتية (شكل ٣-٢٤) بالأشكال الرمزية:



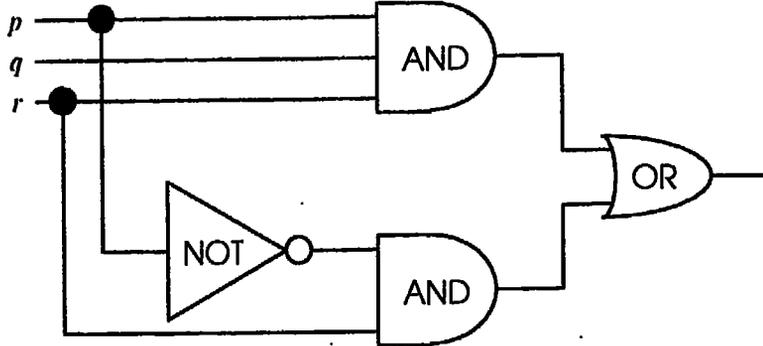
شكل ٣-٢٤

الحل

المكافئ المنطقي للدائرة هو:

$$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge r)$$

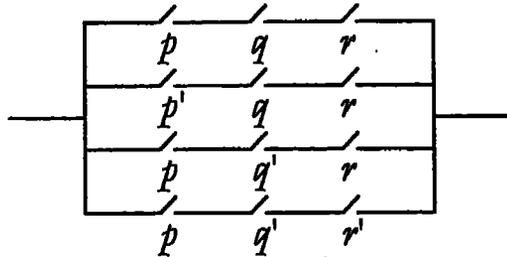
ويعبر عنها بالأشكال الرمزية كالتالي (شكل ٣-٢٥):



شكل ٣-٢٥

مثال (٢)

عبر عن الدائرة الآتية (شكل ٣-٢٦) بالأشكال الرمزية:



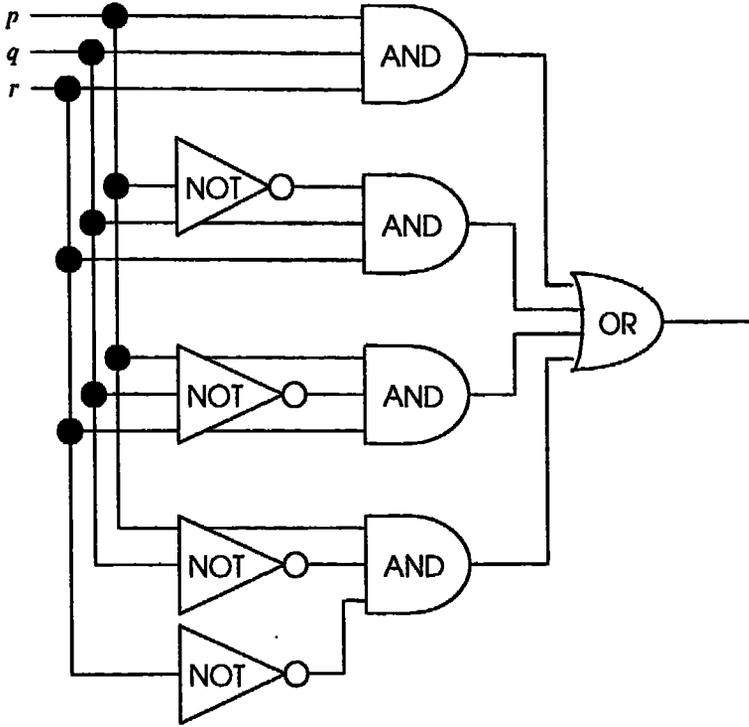
شكل ٣-٢٦

الحل

المكافئ المنطقي للدائرة هو:

$$x \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r')$$

ويُعبر عنها بالأشكال الرمزية كالتالي (شكل ٣-٢٧):



شكل ٣-٢٧

٦-٣ خرائط كارنوف لاختزال الدوائر Karnaui Maps

تعتبر خرائط كارنوف طريقة سهلة وبسيطة لاختزال الدوائر. وهي تعتمد أساساً على جبر Bool وقوانين المنطق. وقبل أن ندرس تلك الخرائط سنصطلح على كتابة التقرير $p \vee q$ بالصورة $p + q$ والتقرير $p \wedge q$ بالصورة pq وسنستبدل علامة التكافؤ "≡" بالعلامة "=" وسنطبق هذه الاصطلاحات على أي تقرير مركب يحتوي على ثلاثة أو أكثر من التقارير البسيطة؛ فمثلاً التعبير:

$$x = pq + p'q + p'q'$$

سرمز للتقرير المركب:

$$x \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

الذى يمكن تبسيطه باستخدام قوانين المنطق كالاتى:

$$x \equiv (p \wedge q) \vee [\sim p \wedge (q \vee \sim q)]$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge T)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee \sim p$$

$$\equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)$$

$$\equiv T \wedge (q \vee \sim p)$$

$$\equiv q \vee \sim p$$

بكتابة التقرير x بالصورة:

$$x = pq + p'q + p'q'$$

فإننا يمكن أن نختزله كالاتى:

$$x = pq + p'(q + q')$$

$$= pq + p' \cdot 1$$

$$= pq + p'$$

$$= (p + p')(q + p') \quad !$$

ويلاحظ أننا هنا استخدمنا جبر Bool الذى فيه العملية "+" (أى " \vee ")

متوزعه على العملية "." (أى " \wedge "). وحيث أن هذا يخالف قواعد جبر

الأعداد الحقيقية التى تعودنا عليها فإنه يحسن استخدام خرائط كسارنوف فى

الاختزال كالاتى (شكل ٣-٢٨):

	q	q'
p	pq	pq'

p'	$p'q$	$p'q'$
------	-------	--------

شكل ٢٨-٣

ويوقع التقرير:

$$x = pq + p'q + p'q'$$

على الخريطة السابقة كالآتي (شكل ٢٩-٣):

	q	q'
p	X	
p'	X	X

شكل ٢٩-٣

وفي هذه الخريطة يحتزل العمود الرأسى إلى المفتاح الذى عند رأس العمود (أى q)، أما الصف الأفقى فيحتزل إلى المفتاح الذى عند يساره (أى p'). أى

$$x = p' + q$$

وتظهر قيمة خرائط كارنوف عندما تحتوى الدائرة أكثر من مفتاحين مستقلين. وللتعامل مع ثلاثة مفاتيح مستقلة p, r, q نستخدم خريطة كارنوف بالشكل

الآتى (شكل ٣٠-٣):

	qr	qr'	$q'r$	$q'r'$
p	pqr	pqr'	$pq'r$	$pq'r'$
p'	$p'qr$	$p'qr'$	$p'q'r$	$p'q'r'$

شكل ٣٠-٣

مثال (١)

اختزل الدائرة المثلثة بالتقرير:

$$x = pqr + pqr' + p'qr' + pq'r$$

الحل

نوقع تلك الدائرة على خريطة كارنوف كالآتي (شكل ٣-٣١):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'		X		

شكل ٣-٣١

وفي هذه الخريطة اختزلنا العمود إلى رأسه qr' أما الصف فيختزل إلى pr ،

حيث p هو دليل الصف، r الرمز المشترك بين qr ، $q'r$. إذن:

$$x = pr + qr'$$

لنفرض الآن أننا اختزلنا الدائرة كالآتي (شكل ٣-٣٢):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'		X		

شكل ٣-٣٢

أى أن:

$$x = pr + qr' + pq$$

أى أننا حصلنا على الحد pq علاوة على الحدين السابقين. باستخدام جبر Bool فإن:

$$\begin{aligned}x &= pr(q + q') + qr'(p + p') + pq(r + r') \\ &= prq + prq' + qr'p + qr'p' + pqr + pqr'\end{aligned}$$

نلاحظ أن الحد الخامس هو تكرار للحد الأول والحد السادس هو تكرار للحد الثالث. وباستخدام قانون اللانمو $y + y = y$ فإن:

$$\begin{aligned}x &= prq + prq' + qr'p + qr'p' = pr(q + q') + qr'(p + p') \\ &= pr + qr'\end{aligned}$$

وهي نفس نتيجة الاختزال السابقة.

مثال (٢)

اختزل الدائرة الممتلئة بالتقرير:

$$x = pqr + pqr' + pq'r + p'qr + p'q'r$$

الحل

نوّع الدائرة على خريطة كارنوف كالآتي (شكل ٣-٣٣):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'	X			X

شكل ٣-٣٣

في هذه الخريطة يختزل العمود الأول إلى qr ويختزل العمود الرابع إلى $q'r$ ؛

أما الخانة pqr' فتختزل مع جارها pqr إلى pq . أى أن:

$$x = qr + q'r + pq = (q + q')r + pq = r + pq$$

مثال (٣)

اختزل الدائرة الممثلة بالتقرير:

$$x = pqr + pqr' + p'qr' + p'q'r' + p'q'r$$

الحل

نوقع الدائرة على خريطة كارنوف كالآتي (شكل ٣-٣٤):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٤

وهنا فإن لدينا أحد الإختيارين الآتين:

إما الإختيار الموضح بالشكل ٣-٣٥:

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٥

وهذا يؤدي إلى الإختزال:

$$x = pq + p'r' + p'q'$$

أو الإختيار الموضح بالشكل ٣-٣٦:

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٦

وهذا يؤدي إلى الإختزال:

$$x = pq + qr' + p'q'$$

أما إذا أخذنا الاختيار الموضح بالشكل ٣-٣٧:

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		
p'		X	X	X

شكل ٣-٣٧

فإن الدائرة تختزل إلى:

$$x = pq + qr' + p'r' + p'q'$$

وهذا الإختزال يحتوي حدا زائدا كما يتضح من التحليل الآتي:

$$\begin{aligned} pq + qr' + p'r' + p'q' &= pq(r+r') + (p+p')qr' \\ &\quad + p'(q+q')r' + p'q'(r+r') \\ &= pqr + pqr' + pqr' + p'qr' \\ &\quad + p'qr' + p'q'r' + p'q'r + p'q'r' \end{aligned}$$

الحد الثالث يمكن شطبه لأنه تكرر للحد الثاني، والحد الرابع يمكن شطبه لأنه تكرر للحد الخامس ؛ وهذا يعنى أن الحد $q r' (p + p')$ (أى $q r'$) زائد. إذن:

$$x = p q + p' r' + p' q'$$

وهذا بالضبط ما حصلنا عليه فى الإختيار الأول.

كذلك الحد الخامس يمكن شطبه لأنه تكرر للحد الرابع، والحد السادس يمكن شطبه لأنه تكرر للحد الثامن ؛ وهذا يعنى أن الحد $p' (q + q') r'$ (أى $p' r'$) زائد. إذن:

$$x = p q + q r' + p' q'$$

وهذا بالضبط ما حصلنا عليه فى الإختيار الثانى.

٧-٣ تطبيقات متنوعة على نظرية المفاتيح

سنطبق الآن نظرية المفاتيح وخرائط كارنوف على بعض الأمثلة العملية:

مثال (١)

مصعد يُعمل بين طابقين وفى كل طابق مفتاح استدعاء للمصعد. صمم دائرة بحيث يفتح باب المصعد (وبالطبع الباب الموجود بالطابق) إذا ضغطنا أحد المفاتيح وكان المصعد موجودا فى الطابق المناظر لذلك المفتاح.

الحل

p	q	r	x
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

نفرض أن p ، q هما مفتاحا الاستدعاء في الطابقين الأول ، الثاني على الترتيب ونفرض أن r هو المفتاح الأتوماتيكي الذي يبين موضع المصعد ونفرض أنه يكون موصلاً عندما يكون المصعد في الطابق الأول وغير موصل عندما يكون المصعد في الطابق الثاني. إذن سيكون جدول المخرج للمفاتيح الثلاثة كما هو مبين. ويتضح من الجدول أن الدائرة التي تتحكم في فتح باب المصعد تكافئ التقرير:

$$x = pqr + pq'r' + p'qr + p'q'r'$$

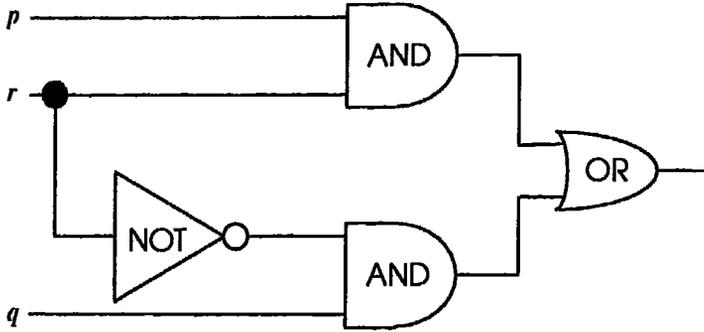
وباستخدام خريطة كارنوف (شكل ٣-٣٨):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X	X		X
p'		X		

شكل ٣-٣٨

فإن الدائرة تختزل إلى $x = pr + qr' = x$ وهي تحتوي على ثلاثة مفاتيح (أنظر

شكل ٣-٣٩):



شكل ٣-٣٩

مثال (٢)

صالة كبيرة تضاء أنوارها من ثلاثة مفاتيح موضوعة على ثلاثة أبواب مختلفة. صمم دائرة بحيث تضاء الصالة عند الدخول من أحد الأبواب (يفرض أنها

p	q	r	x
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

كانت مطفأة) وتطفأ عند الخروج من أى باب (يفرض أنها كانت مضاءة).

الحل

نكوّن جدول المخرج (مع ملاحظة أن الصالة تكون مضاءة إذا استخدمنا عددا فرديا من المفاتيح وتكون مطفأة إذا استخدمنا عددا زوجيا من المفاتيح). واضح من الجدول أن الدائرة التي تتحكم في اضاءة الصالة تكافئ التقرير:

$$x = p q r + p q' r' + p' q r' + p' q' r$$

نرسم خريطة كارنوف لتلك الدائرة كالآتي (شكل ٣-٤٠):

	qr	qr'	$q'r'$	$q'r$
p	X		X	
p'		X		X

شكل ٣-٤٠

واضح أن هذه الخريطة لا تجدى في اختزال للدائرة ولكن نستطيع أن نختزل الدائرة إذا كتبنا التقرير بالصورة:

$$x = p(qr + q'r') + p'(qr' + q'r)$$

نجد أن $(qr' + q'r)$ يكافئ $q \nabla r$ أما $(qr + q'r')$ فنستطيع أن نعالجه كالاتى:

$$\begin{aligned} (qr + q'r')' &= (qr)'(q'r')' && \text{(قانون دى مورجان)} \\ &= (q' + r')(q + r) && \text{(قانون دى مورجان)} \\ &= (q + r)(q' + r') && \text{(قانون الإبدال)} \\ &= qq' + qr' + rq' + rr' && \text{(قانون التوزيع)} \\ &= F + qr' + rq' + F && \text{(قانون F)} \\ &= qr' + q'r && \text{(قانون الإبدال)} \end{aligned}$$

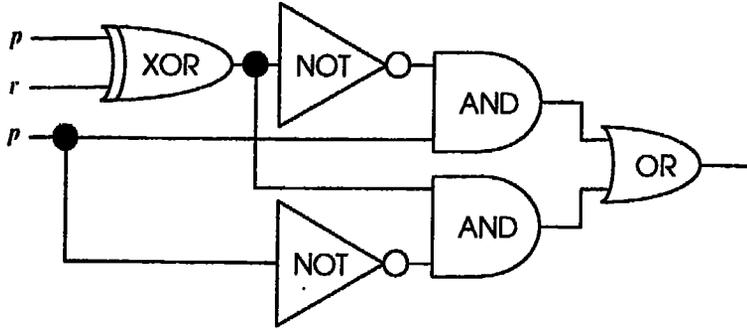
إذن:

$$qr + q'r' = (qr' + q'r)'$$

وعلى ذلك تختزل الدائرة إلى دائرة أبسط ممثلة بالتقرير الآتى:

$$x = p(qr' + q'r)' + p'(qr' + q'r)$$

وتكون الدائرة كما هو مبين بشكل ٣-٤١.



شكل ٣-٤١

مثال (٣)

كُسر زجاج نافذة في فصل من الفصول ووجد المدرس أربعة تلاميذ في الفصل فسألهم عن الفاعل فكانت الاجابات كالاتى:

أحمد : فعلها تأمر.

تامر : أحمد كاذب.

سمير : أنا لم أفعلها.

شريف : فعلها أحمد.

فإذا علمت أن ثلاثة تلاميذ لا يقولون الصدق فمن تُرى كسر زجاج النافذة؟

الحل

نفرض التقارير الآتية:

p : فعلها أحمد

q : فعلها تامر

r : فعلها سمير

s : فعلها شريف

وعلى ذلك تكون الإجابات هي q, q', r', p . وحيث أن ثلاث إجابات خاطئة، إذن فإن لدينا أربع احتمالات هي:

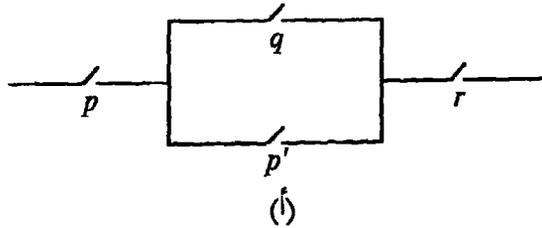
أحمد وحده صادق [أي $p' (r')' (q')' q$] أو تامر وحده صادق [أي $p' (r')' q' (q')'$] أو سمير وحده صادق [أي $p' (r')' q' (q')'$] أو شريف وحده صادق [أي $p' (r')' q' (q')'$]. إذن فالتقرير الذي يبين من الذي كسر زجاج النافذة هو:

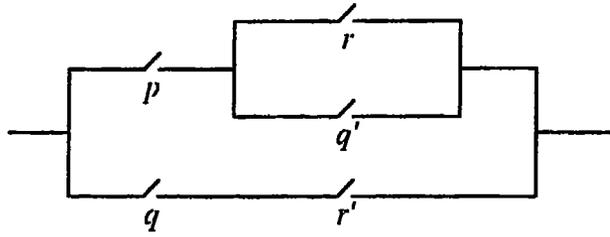
$$\begin{aligned} x &= q (q')' (r')' p' + q' q' (r')' p' + q' (q')' r' p' + q' (q')' (r')' p \\ &= q q r p' + q' q' r p' + q' q r' p' + q' q r p \\ &= q r p' + q' r p' + 0 + 0 \\ &= (q + q') r p' \\ &= r p' \end{aligned}$$

ويكون الإستنتاج المبني على فرض أن ثلاثة لم يقولوا الصدق هو أن سمير فعلها وأحمد لم يفعلها !

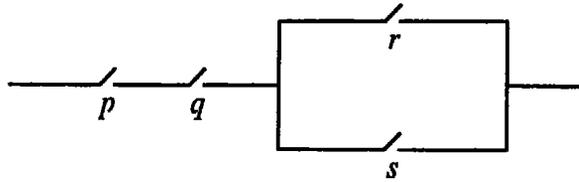
تمارين (٣)

١. عبّر عن كل دائرة من الدوائر الآتية منطقياً وأعد رسم الدوائر مستخدماً الأشكال الرمزية:





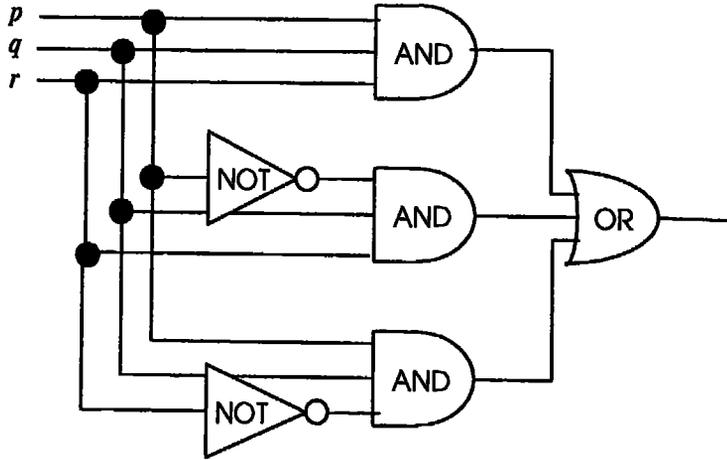
(ب)



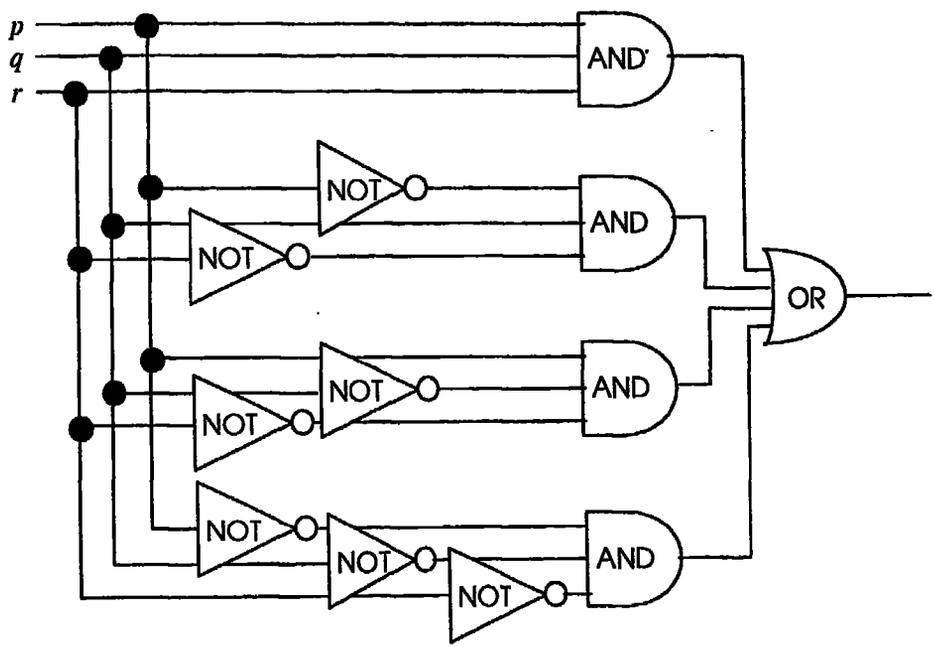
(ج)

٢. عبّر عن كل من الدوائر الآتية منطقيا واختزلها إلى دائرة أبسط وارسم الدائرة

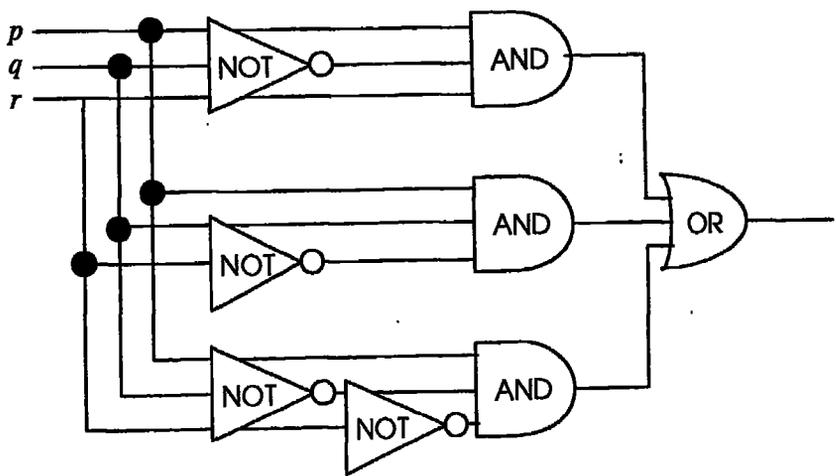
المختزلة:



(د)



(b)



(c)

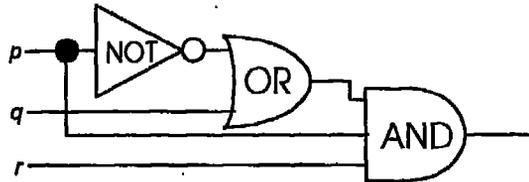
٣. صمم دائرة السلم التي يمكن فيها إضاءة مصباح أو اطفأؤه من مفتاحين أحدهما موضوع عند بداية السلم والآخر عند نهايته.

٤. لجنة تحكيم في أحد الامتحانات تتكون من ثلاثة أساتذة ولكل منهم مفتاح تحت تصرفه بحيث عند موافقته على نجاح الطالب يضغط على المفتاح ليحمله في وضع التوصيل وعند عدم موافقته يدع المفتاح في وضع عدم التوصيل. صمم دائرة بحيث يدق جرس متصل بدائرة الثلاثة مفاتيح عند موافقة أغلبية الأساتذة على نجاح الطالب ولا يدق في الحالات الأخرى.

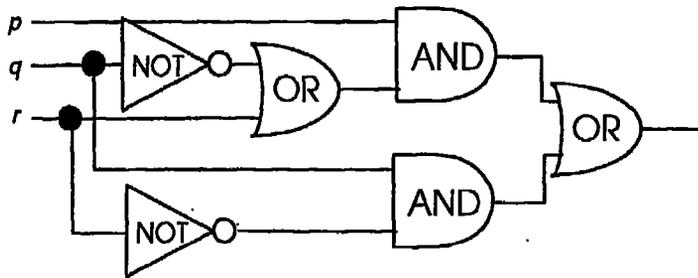
٥. في مثال (٣) ماذا تكون الاجابة إذا فرضنا أن تلميذا واحدا لم يصدق في عبارته؟

الإجابات

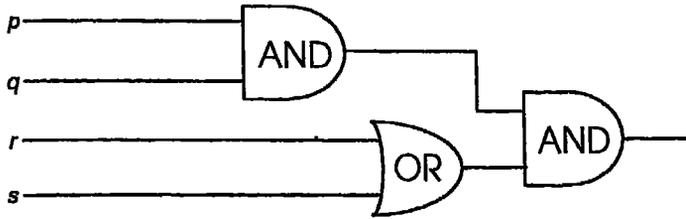
١. $p(p' + q)r$ (أ)



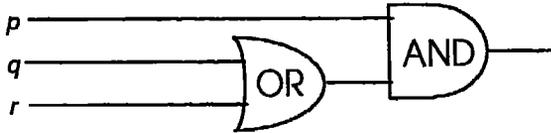
(ب) $p(r + q') + qr'$



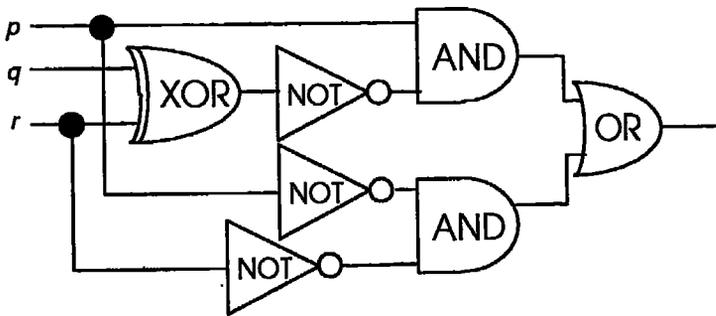
$$pq(r+s) \text{ (ج)}$$



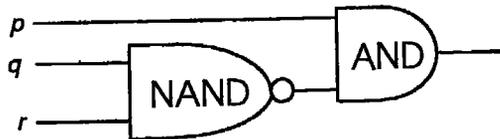
$$p(q+r) \text{ (د) . ۲}$$



$$p(q \vee r)' + p'r' \text{ (ب)}$$



$$p(qr)' \text{ (ع)}$$

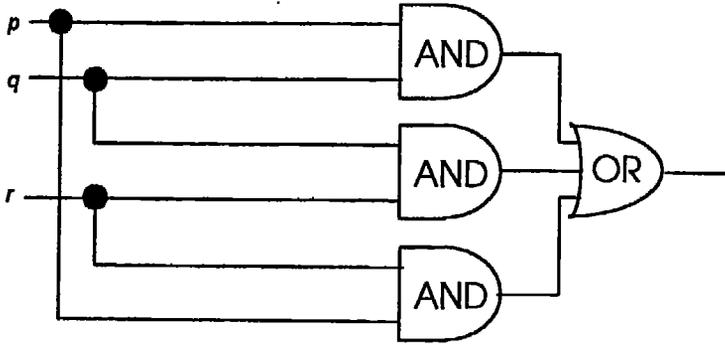


- ١٠٣ -

٣. $p \Delta q$ هي $p'q + pq'$



٤. $x = pq + qr + pr$



٥. فعلها أحمد.

الباب الرابع

بعض نظم العد

SOME COMPUTING SYSTEMS

١-٤ نبذة تاريخية

استخدم الإنسان شتى الوسائل للتعبير عن الأعداد: استخدام أصابع اليدين، ورسم الصور، وعقد العقد على الحبال... إلى آخر تلك الطرق البدائية. ثم استخدم المصريين القدماء الرموز:

... ، $\frac{2}{3}$ ، ... ، $\frac{1}{8}$ ، ... ، \cap ، ... ، IIIII ، IIII ، III ، II ، I

واستخدم الرومان الرموز الرومانية المعروفة:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, ..., C, ..., M, ...

ثم تبعهم الهنود باستخدام الرموز:

... ، ٩ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١

والعرب باستخدام الرموز:

... ، 100 ، ... ، 10 ، 9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1

للتعبير عن الأعداد.

ومن ناحية أخرى فقد أتت عدة نظم للعد منها النظام العشري الذي يعتمد

على عشرة أرقام:

9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 0

والنظام الثنائي الذى يستخدم فيه رقمين 0 ، 1 ؛ والنظام الاثنا عشرى (كما فى الساعات) والنظام الستينى (كما فى الدقائق والثوانى)... الخ. وتبعاً لاختلاف نظم العد اختلفت طرق الجمع والضرب ولكن بقيت طريقة مضاعفه الأعداد وأخذ أنصافها (ربما حتى الآن فى الريف الروسى) مستخدمة فى ضرب الأعداد.

مثال

لضرب 21 فى 39 تُبَّع الطريقة الآتية (الطريقة الرومانية):

$$\text{ضعف } 39 = 78$$

$$4 \text{ مرّات } 39 = \text{ضعف } 78 = 156$$

$$8 \text{ مرّات } 39 = \text{ضعف } 156 = 312$$

$$16 \text{ مرّة } 39 = \text{ضعف } 312 = 624$$

وحيث أن $21 = 16 + 4 + 1$ ، إذن:

$$39 \times 21 = (16 \text{ مرّة} + 4 \text{ مرّات} + \text{مرّة واحدة}) \times 39$$

$$= 39 + 156 + 624$$

$$= 819$$

ويمكن أيضاً أن تُبَّع الطريقة الروسية فى الحصول على نفس النتيجة. وتتلخص الطريقة فى أننا ننشئ عمودين: فى العمود الأول نضاعف العدد 39 وفى العمود الثانى نأخذ أنصاف العدد 21 مع إهمال باقى القسمة وهو 1 ثم نلغى الصف الذى يحتوى على عدد زوجى فى العمود الثانى ثم نجمع بقيه مكونات العمود الأول؛ وذلك على النحو التالى:

	21	39
(مع إهمال باقى القسمة وهو 1)	40	78
	5	156
(مع إهمال باقى القسمة وهو 1)	2	312
	1	624

		819

(لاحظ أننا شطبنا الصف الذى يحتوى عددا زوجيا فى عمود الأصفاف).
ويمكن أن نفسر النتيجة التى حصلنا عليها كالآتى:

$$\begin{aligned}21 \times 39 &= (10 + \frac{1}{2}) \times 78 \\ &= (5 + \frac{1}{4}) \times 156 \\ &= (2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \times 312 \\ &= (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}) \times 624 \\ &= 624 + 156 + 39 \\ &= 819\end{aligned}$$

٢-٤ نظام العد الثنائى Binary Number System

لنأخذ العدد 4605 فى النظام العشري المعتاد. بالتعبير عن هذا العدد بدلالة قوى العدد 10 نجد أن:

$$\begin{aligned}4605 &= 4 \times 1000 + 6 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1 \\ &= 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0\end{aligned}$$

ونستطيع أن نكتب العدد 4605 بالصورة الآتية:

خانة الآحاد	خانة العشرات	خانة المئات	خانة الألوف
5	0	6	4
$\times 10^0$	$\times 10^1$	$\times 10^2$	$\times 10^3$
= 5	= 0	= 600	= 4000

حيث الأعداد في الصف الأخير هي القيمة المكانية *place value* لأرقام العدد 4605. ونلاحظ أننا في نظام العد العشري *decimal computing* نستخدم عشرة أرقام وهي (0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 . نستطيع أن ننشئ نظاما مثل النظام العشري نسميه نظام العد الثنائي *binary computing* نستخدم فيه رقمين فقط وهما (0 ، 1 . وفي هذا النظام يعبر عن أى عدد بدلالة قوى العدد 2 فمثلا:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \\ 2 &= 2^1 \\ 3 &= 1 + 2 = 2^0 + 2^1 \\ 4 &= 2^2 \\ 5 &= 1 + 4 = 2^0 + 2^2 \\ 6 &= 2 + 4 = 2^1 + 2^2 \\ 7 &= 1 + 2 + 4 = 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 8 &= 2^3 \\ 9 &= 1 + 8 = 2^0 + 2^3 \end{aligned}$$

.....
وإذا استخدمنا نظام الخانات بقيمتها المكانية مثل النظام العشري فإننا نكتب:

$$\begin{aligned} 1 &= (0001)_2 & 2 &= (0010)_2 & 3 &= (0011)_2 & 4 &= (0100)_2 \\ 5 &= (0101)_2 & 6 &= (0110)_2 & 7 &= (0111)_2 & 8 &= (1000)_2 \\ 9 &= (1001)_2 & 11 &= (1011)_2 & 12 &= (1100)_2 & 13 &= (1101)_2 \\ 14 &= (1110)_2 & 15 &= (1111)_2 & & & & \dots \end{aligned}$$

مثال (١)

أكتب العدد 21 بالنظام الثنائي.

الحل

$$\begin{aligned} 21 &= 1 + 4 + 16 \\ &= 2^0 + 2^2 + 2^4 \\ &= 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 \\ &= (10101)_2 \end{aligned}$$

وللحصول على الصورة الثنائية بطريقة أسهل تُتبع الآتي:

2		21	
2		10	(الباقى 1)
2		5	(الباقى 0)
2		2	(الباقى 1)
2		1	(الباقى 0)
		0	(الباقى 1)

في هذا الجدول نقسم العدد على 2 ونكتب خارج القسمة أسفل العدد ونحسب باقى القسمة ونضعه على يمين خارج القسمة ونكرر هذه العملية حتى نصل إلى الصفر (كن خارج قسمة العدد 1 على 2) ويكون باقى القسمة 1، ثم نقرأ العمود الأخير من أسفل إلى أعلى ونكتبه من اليسار إلى اليمين هكذا:
 $21 = (10101)_2$

مثال (٢)

أكتب العدد 39 بالنظام الثنائي.

الحل

2	39	
2	19	(الباقي 1)
2	9	(الباقي 1)
2	4	(الباقي 1)
2	2	(الباقي 0)
2	1	(الباقي 0)
	0	(الباقي 1)

∴ $39 = (100111)_2$

٣-٤ التحويل من الصورة الثنائية للصورة العشرية

لنأخذ العدد الثنائي $(10101)_2$. نستطيع أن نكتب هذا العدد مستخدمين القيم المكانية كالآتي:

1	0	1	0	1
$\times 2^4$	$\times 2^3$	$\times 2^2$	$\times 2^1$	$\times 2^0$
=	= 0	= 4	= 0	= 1
16				

∴ $(10101)_2 = 1 + 4 + 16 = 21$

كذلك العدد $(100111)_2$ يمكن كتابته مستخدمين القيم المكانية كالآتي:

1	0	0	1	1	1
$\times 2^5$	$\times 2^4$	$\times 2^3$	$\times 2^2$	$\times 2^1$	$\times 2^0$
= 32	= 0	= 0	= 4	= 2	= 1

∴ $(100111)_2 = 1 + 2 + 4 + 32 = 39$

بكتابة العدد $(100111)_2$ بالصورة:

$$\begin{aligned}(100111)_2 &= 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 \\ &= 1 + 2 \{ 1 + 2 [1 + 2 (0 + 2 (0 + 2 (0 + 2 (1))))] \} \\ &= 1 + 2 \{ 1 + 2 [1 + 2 (0 + 2 \times 2)] \} \\ &= 1 + 2 \{ 1 + 2 [1 + 2 (0 + 4)] \} \\ &= 1 + 2 \{ 1 + 2 [1 + 2 \times 8] \} \\ &= 1 + 2 \{ 1 + 2 \times 9 \} \\ &= 1 + 2 \{ 1 + 18 \} \\ &= 1 + 2 \times 19 \\ &= 1 + 38 \\ &= 39\end{aligned}$$

ويمكن إجراء هذا التحويل بطريقة أتوماتيكية كالآتي:

(أ) نصُفُّ أرقام العدد متباعدة هكذا:

1 0 0 1 1 1

(ب) نضع 2 تحت الرقم الثاني من اليسار هكذا:

1 0 0 1 1 1
 2

(ج) نجمع العمود الثاني هكذا:

1 0 0 1 1 1
 2

(د) نضاعف ناتج الجمع ونضعه تحت الرقم الثالث من العمود هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2	4			
<hr/>					

2

(هـ) نجمع العمود الثالث هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2	4			
<hr/>					

2 4

(و) نكرر العملية هكذا:

1	0	0	1	1	1
	2	4	8	18	38
<hr/>					

2 4 9 19 39

فنصل إلى النتيجة النهائية وهي ٣٩.

مثال (١)

حوّل العدد $(11101)_2$ إلى الصورة العشرية.

الحل

1	1	1	0	1
	2	6	14	28
<hr/>				
	3	7	14	29

∴ $(11101)_2 = 29.$

مثال (٢)

حوّل $(111101)_2$ إلى الصورة العشرية.

الحل

1	1	1	1	0	1
	2	6	14	30	60

	3	7	15	30	61

$$\therefore (111101)_2 = 61$$

٤-٤ الكسور الثنائية Binary Fractions

استخدم المصريون القدماء الكسور التي بسطها الواحد الصحيح مستخدمين

رموزاً أخرى غير المستخدمة حالياً. فمثلاً الكسر $\frac{3}{4}$ يعبر عنه كالتالي:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

والعدد $\frac{7}{9}$ يعبر عنه كالتالي:

$$\begin{aligned}\frac{7}{9} &= \frac{1}{2} + \frac{5}{18} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{10}{36} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{9}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}\end{aligned}$$

وعيب هذه الطريقة هي تعدد الصور التي يمكن أن نعبر بها عن كسر معين

فمثلاً:

$$\begin{aligned}\frac{7}{8} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \dots, \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = \dots\end{aligned}$$

والطريقة المثلى للتغلب على هذا القصور هي أن نعبر عن الكسر بدلالة قوى $\frac{1}{2}$ ؛ وفي هذه الحالة يكتب الكسر بطريقة وحيدة.

مثال

أكتب الكسر $\frac{31}{64}$ كمجموع كسور بدلالة قوى $\frac{1}{2}$.

الحل

$$\begin{aligned}\frac{31}{64} &= \frac{16+15}{64} = \frac{16+8+7}{64} = \frac{16+8+4+2+1}{64} \\ &= \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\end{aligned}$$

وإذا تأملنا معنى الكسور العشرية، فإن الكسر 0.3257 مثلا يمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$0.3257 = \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000}$$

والجدول الآتي يعبر عن القيم المكانية لأرقام هذا الكسر:

.	3	2	5	7
	$\times 10^1$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^4$
	$= \frac{3}{10}$	$= \frac{2}{100}$	$= \frac{5}{1000}$	$= \frac{7}{10000}$

نستطيع أن ننشئ نظاما لكتابة الكسور ثنائيا مثل النظام العشري نستخدم فيه رقمين فقط وهما 0 ، 1 . وفي هذا النظام يعبر عن قوى العدد $\frac{1}{2}$ ثنائيا كالاتي:

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} = (0.1)_2 , \frac{1}{4} = 2^{-2} = (0.01)_2 , \frac{1}{8} = 2^{-3} = (0.001)_2 , \dots$$

وتمتد النظام الثنائي إلى الكسور الاعتيادية، فمثلا:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = (0.11)_2 , \frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = (0.1101)_2 , \dots$$

مثال (١)

ضفدعة في وسط بركة من الماء تريد أن تصل إلى الأرض فقفزت نصف المسافة بينها وبين أقرب نقطة، ثم قفزت نصف المسافة الباقية، ثم نصف المسافة الباقية.. وهكذا. عبّر عن المسافات التي قفزتها بدلالة كسور من المسافة الكلية بينها وبين الأرض . هل تصل الضفدعة إلى الأرض ؟

الحل

نفرض المسافة بين الضفدعة وأقرب نقطة هي الوحدة فتكون المسافات التي قفزتها الضفدعة هي:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

على الترتيب. وبالتمثيل الثنائي:

$$(.1)_2, (.01)_2, (.001)_2, (.0001)_2, \dots$$

∴ المسافات التي غطتها الضفدعة في المرات المتتالية هي:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \dots$$

أى:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$$

على الترتيب. وبالتمثيل الثنائي:

$$(.1)_2, (.11)_2, (.111)_2, (.1111)_2, \dots$$

واضح أن الضفدعة لا يمكن أن تصل إلى الأرض حيث أنها دائما تترك مسافات

بينها وبين الأرض معطاة بالمتتالية:

$$(.1)_2, (.01)_2, (.001)_2, (.0001)_2, \dots$$

مثال (٢)

أكتب $\frac{2}{3}$ ثنائيا.

الحل

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{3 \times 2} = \frac{3+1}{3 \times 2} = \frac{3}{3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3 \times 4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right]\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2}{3} = (.101010\dots)_2$$

ونلاحظ أن الصورة الثنائية هنا غير منتهية ولكنها دائرية. لذا نكتب:

$$\frac{2}{3} = (.1\overline{0})_2$$

مثال (٣)

أكتب الكسر $\frac{7}{9}$ كمجموع كسور بدلالة قوى $\frac{1}{2}$.

الحل

$$\begin{aligned}\frac{7}{9} &= \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{9 \times 2} = \frac{9+5}{9 \times 2} = \frac{9}{9 \times 2} + \frac{5}{9 \times 2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{9 \times 2} = \frac{1}{2} + \frac{5 \times 2}{9 \times 4} = \frac{1}{2} + \frac{10}{9 \times 4} = \frac{1}{2} + \frac{9+1}{9 \times 4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9 \times 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1 \times 16}{9 \times 4 \times 16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{16}{9 \times 64} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9+7}{9 \times 64} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{9 \times 64} + \frac{7}{9 \times 64} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{64} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} [1 + \frac{7}{9}] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} (1 + \frac{7}{9})] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} [1 + \frac{7}{9}] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \dots] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} + \dots \\ \therefore \frac{7}{9} &= (.11000111000111\dots)_2 = (.1\overline{1000111})_2 \end{aligned}$$

٤-٤-١ تحويل الكسور العشرية إلى النظام الثنائي

لنأخذ الكسر العشري 0.6875 . نستطيع أن نحول هذا الكسر إلى الصورة

الثنائية كالآتي:

$$\begin{aligned} 0.6875 &= (0.6875 \times 2) \div 2 \\ &= 1.3750 \div 2 \\ &= \frac{1}{2} + 0.3750 \div 2 \\ &= \frac{1}{2} + (0.3750 \times 2) \div 4 \\ &= \frac{1}{2} + 0.7500 \div 4 \\ &= \frac{1}{2} + (0.7500 \times 2) \div 8 \\ &= \frac{1}{2} + 1.5000 \div 8 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0.5000 \div 8 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + (0.5000 \times 2) \div 16 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{array}{r} 0.65625 \\ \times \quad 2 \\ \hline = \textcircled{0}.31250 \\ \times \quad 2 \\ \hline = \textcircled{0}.62500 \\ \times \quad 2 \\ \hline = \textcircled{0}.25000 \\ \times \quad 2 \\ \hline = \textcircled{0}.50000 \\ \times \quad 2 \\ \hline = \textcircled{0}.00000 \end{array}$$

(لاحظ أننا أهملنا الضرب في العدد الصحيح).

$$\therefore 0.65625 = (0.10101)_2$$

هذا؛ ويمكن استخدام هذه الطريقة في تحويل أى كسر اعتيادى إلى الصورة الثنائية عن طريق تحويله إلى كسر عشري أولاً كما يتضح من المثال الآتى:

مثال (٢)

حول $\frac{5}{7}$ إلى الصورة الثنائية.

الحل

$$\frac{5}{7} \quad \overline{0.714285}$$

ونجرى عملية التحويل إلى النظام الثنائى هكذا:

$$\begin{array}{r} 0.71428 \quad 6 \\ \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}.42857 \quad 2 \\ \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{0}.85714 \quad 4 \\ \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}.71428 \quad 6 \\ \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{1}.42857 \quad 6$$

وملاحظة أن الرقم في أقصى يمين العدد مقرب فإننا نكون قد وصلنا إلى نفس الصورة في ناتج العملية الثالثة وهي $\textcircled{1}.428572$ ؛ مما يدل على أن العملية ستكرر.

$$\therefore = (0.\overline{1011})_2 = (0.\overline{101})_2$$

ملحوظة

عند تحويل عدد يحتوي جزءا صحيحا وآخر كسرا إلى النظام الثنائي يتم تحويل كل جزء على حدة.

مثال

حول العدد $59\frac{13}{16}$ إلى النظام الثنائي.

الحل

(أ) نحول أولاً الجزء الصحيح وهو 59 إلى النظام الثنائي فنحصل على $(111011)_2$.

(ب) نحول الكسر $\frac{13}{16}$ إلى النظام الثنائي فنحصل على $(0.1101)_2$.

إذن $59\frac{13}{16}$ يساوي $(111011.1101)_2$.

٥-٤ التحويل من كسر ثنائي إلى كسر عشري

لنأخذ الكسر الثنائي $(0.110111)_2$. نعلم أن القيمة المكانية لأرقام هذا الكسر

هي كما يلي:

$$(0.110111)_2 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6}$$

$$\therefore (0.110111)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{32+16+4+2+1}{64} = \frac{55}{64}$$

ويمكن كتابة الكسر بصورته العشرية كما يلي:

$$\begin{aligned} (0.110111)_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \\ &= 0.500000 + 0.250000 + 0.062500 + 0.031250 + 0.015625 \\ &= 0.859375 \end{aligned}$$

وللاختصار نكتب:

$$\begin{array}{r} (0.110111)_2 = 0.500000 \\ 0.250000 + \\ 0.125000 \\ 0.062500 + \\ 0.031250 + \\ 0.015625 + \\ \hline = 0.859375 \end{array}$$

حيث نلاحظ أن الكسر 0.500000 هو الصورة العشرية للكسر $\frac{1}{2}$ ، والكسر

(0.250000) هو الصورة العشرية للكسر $\frac{1}{4}$ وهو نصف (0.500000) ، ...
وهكذا. ونلاحظ أيضا أن الكسر (0.125000) قد شطب لأن الرقم العشري
الثالث صفر.

مثال (١)

حول العدد $(11011.001011)_2$ إلى الصورة العشرية.

الحل

الكسر	الجزء الصحيح				
0.500000	1	1	0	1	1
0.250000					
0.125000					
0.062500					
0.031250					
0.015625					
0.171875					
		2	6	12	26
		3	6	13	27

$$\therefore (11011.001011)_2 = 27.171875$$

مثال (٢)

حول العدد $(0.\overline{101})_2$ إلى الصورة العشرية.

الحل

$$\begin{aligned} (0.\overline{101})_2 &= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{64} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

٦-٤ الجمع ثنائيا Binary Addition

قد يكون من المفيد أن نعلم أن العمليات الحسابية داخل الحاسبات الإلكترونية لا تتم بالنظام العشري حيث أن كل مفتاح داخل دوائره المنطقية له حالتان فقط: 0، 1. لذا فإن كل عدد نكتبه يُترجم تلقائياً إلى النظام الثنائي وتُجرى العمليات الحسابية بالطريقة التي سنبينها بعد ثم يُترجم الناتج ثانية إلى النظام العشري. وسنبداً الآن بعملية الجمع المعرّفة بالجدول الآتي:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

ولنأخذ العددين 89 ، 57 اللذين يكتبان بالنظام الثنائي $(1011001)_2$ ، $(111001)_2$ على الترتيب. نجري عملية الجمع على نفس الأسس وبنفس الطريقة التي نجري بها عملية الجمع في النظام العشري كالآتي:

(١) نضع العددين تحت بعضهما هكذا:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

(٢) نجمع الرقمين أقصى اليمين مستخدمين الجدول فيكون الناتج 10 أى 0 ويبقى

1 نعمله على الرقمين التاليين هكذا:

أى 146 وهو نفس العدد الذى كنا سنحصل عليه إذا أجرينا عملية الجمع بالنظام العشري.

ملحوظة

يمكن جمع أكثر من عددين ثنائيا غير أنه يستحسن إجراء عملية الجمع على مراحل، كل مرحلة تتضمن جمع عددين فقط.

مثال (١)

اجمع $89 + 57 + 39$ ثنائيا.

الحل

$$89 = (1011001)_2, 57 = (111001)_2, 39 = (100111)_2$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \quad 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \quad \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1$$

$$\therefore (1011001)_2 + (111001)_2 + (100111)_2 = (10111001)_2 = 185$$

وهى نفس النتيجة التى كنا سنحصل عليها إذا جمعنا $39 + 57 + 89$ عشريا.

نلاحظ هنا أننا لم نضطر إلى تقسيم عملية الجمع الثنائى لعدم وجود 1 مجموع

أكثر من ثلاث مرات.

مثال (٢)

اجمع 49 + 57 + 89 ثانياً.

الحل

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\text{? } 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

نجد أن العمود الخامس يحتوي جمع $1+1+1$ بالإضافة إلى 1 محمول من العملية السابقة. لذا نجرى عملية الجمع على مرحلتين كالاتي:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$\hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

والنتيجة هي العدد $(11000011)_2$ أي 195.

٧-٤ الطرح ثنائيا Binary Subtraction

يمكننا إجراء عملية الطرح ثنائيا على نفس الأسس وبنفس الطريقة التي نجري بها الطرح في النظام العشري (أى مع الاستلاف) مع ملاحظة أن:
 $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$, $10 - 1 = 1$

مثال (١)

أوجد ناتج طرح 23 من 39 ثنائيا.

الحل

$$39 = (100111)_2 \quad , \quad 21 = (10101)_2$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 10 \\ + \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

(لاحظ أننا استلفنا الرقم 1 أقصى يسار العدد المطروح منه ليصبح الصفر الذى على يمينه 10 ويصبح هو نفسه صفرا). إذن ناتج الطرح هو العدد الثنائى $(10010)_2$ أى 18 بالتمثيل العشري.

حل آخر

$$\begin{aligned} 100111 - 10101 &= 100111 + (11111 - 10101 + 1) - 100000 \\ &= 100111 + 01010 + 1 - 100000 \\ &= 100111 + 01011 - 100000 \\ &= 110010 - 100000 = 10010 \end{aligned}$$

- ١٣٠ -

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

(ب) نضرب الرقم الأول من اليمين للعدد الثاني وهو 1 في العدد الأول هكذا:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

(ج) نضرب الرقم الثاني من اليمين للعدد الثاني وهو 0 في العدد الأول مع إزاحة

الأرقام خانة واحدة جهة اليسار هكذا:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

(د) نضرب الرقم الثالث من اليمين للعدد الثاني وهو 0 في العدد الأول مع إزاحة

الأرقام خانة واحدة جهة اليسار هكذا:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

(هـ) نكرر العملية هكذا:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

(و) نجمع الخمسة صفوف التي حصلنا عليها جعاً ثانياً هكذا:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

$$1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$$

فتكون النتيجة النهائية هي العدد الثنائي $(110000111)_2$ أي 391 وهو نفس العدد الذي كنا سنحصل عليه إذا أجرينا عملية الضرب عشرياً.

ملاحظات

(١) بدلا من الضرب في صفر نستطيع تجاوز هذه الخطوة بزحزة الأرقام يسارا
خانة واحدة لكل صفر هكذا:

$$\begin{array}{r} 10111 \\ 10001 \\ \hline 111 \\ 10111 \\ 10111 \\ \hline 11000111 \end{array}$$

(٢) في عملية الجمع النهائي لم نصادف حتى الآن جمع أكثر من ثلاثة أرقام بما في ذلك الرقم المحمول. لذا يستحسن إجراء عملية الجمع على مراحل.

مثال

أوجد حاصل ضرب 31 في 23 باستخدام النظام الثنائي.

الحل

$$23 = (10111)_2, \quad 31 = (11111)_2$$

$$\begin{array}{r} 11111 \\ 10111 \\ \hline 11111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{array}$$

(١) الصف

(٢) الصف

(٣) الصف

(٤) الصف

$$\begin{array}{r} \hline \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

وبذلك تكون النتيجة النهائية لحاصل الضرب هي العدد الثنائي $(1011001001)_2$ أى 713 وهو نفس العدد الذى كنا سنحصل عليه إذا أجرينا عملية الضرب عشريا.

٩-٤ القسمة ثنائيا Binary Division

تجرى عملية القسمة فى النظام الثنائى على نفس الأسس وب نفس الطريقة التى تجرى بها عملية القسمة فى النظام العشرى.

مثال (١)

أوجد خارج قسمة ٢٩٤ على ٤٢ ثنائيا.

الحل

$$294 = (100100110)_2 , 42 = (101010)_2$$

تجرى عملية القسمة كالاتى:

(أ) نضع العدد المقسوم عليه يسار العدد المقسوم هكذا:

$$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \) \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

(ب) نأخذ عددا من الأرقام من المقسوم من جهة اليسار مساويا عدد أرقام المقسوم

عليه. فإذا كان العدد المكون من تلك الأرقام أكبر من العدد المقسوم عليه فإننا

وبذلك يكون خارج القسمة هو العدد $(111)_2$ أى 7 وهى نفس النتيجة التى كنا سنحصل عليها إذا أجرينا عملية القسمة عشريا.

ملاحظة

إذا كان أى أو كل من المقسوم والمقسوم عليه عددا مكونا من عدد صحيح وكسر فإننا نزحج كلا من العلامتين للمقسوم والمقسوم عليه بنفس المقدار ونكمل بأصفار ونجرى عملية القسمة كالمعتاد.

مثال (٢)

أوجد خارج قسمة $29\frac{5}{16}$ على $8\frac{11}{32}$ ثانيا.

الحل

$$29\frac{5}{16} = (11101.0101)_2, \quad 8\frac{11}{32} = (1000.01011)_2$$

$$\begin{aligned} 29\frac{5}{16} \div 8\frac{11}{32} &= (11101.0101)_2 \div (1000.01011)_2 \\ &= (1110101010)_2 \div (100001011)_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 100001011 \) \ 1110101010 \\ 011110100 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10110010100 \\ 011110100 \\ 1 \end{array}$$

$$1010001001$$

ويكون خارج القسمة هو $\left(11 \frac{10001001}{100001011}\right)_2$

ويتحول هذا المقدار إلى الصورة العشرية فإنه يساوي $3 \frac{137}{267}$ وهى نفس النتيجة التى نحصل عليها إذا أجرينا عملية القسمة عشريا. أى:

$$29 \frac{5}{16} \div 8 \frac{11}{32} = 3 \frac{137}{267}$$

٤-١٠ تصميم آلة جمع ثنائى Designing a Binary Adder

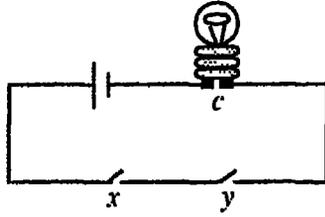
ليكن x ، y عددين يأخذ كل منهما القيمتين 0 ، 1 . فإنه يتكون لدينا الجدول الآتى:

x	y	$x+y$
1	1	10
1	0	01
0	1	01
0	0	00

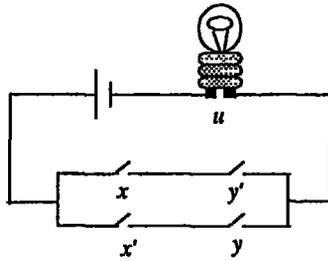
نلاحظ هنا أن حاصل الجمع يتكون من عدد ثنائى من رقمين. ليكن الرقم الذى فى الخانة اليمنى هو u ، وليكن الرقم الذى فى الخانة اليسرى هو c وبذلك يتكون الجدول الآتى:

x	y	c	u
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

يلزمنا لتمثيل العمود c من هذا الجدول عمليا مفتاحان x ، y ومصباح لتمثيل



شكل ١-٤

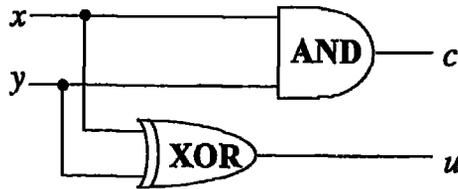


شكل ٢-٤

قيم العمود c وبطارية لتشغيل المصباح. ويمكن تصميم دائرة بسيطة لهذه العملية كما هو مبين بشكل ١-٤. (لاحظ أن المصباح " c " لا يضيء إلا إذا كان كل من المفتاحين x ، y موصلًا).

وإذا تصورنا مصباحًا آخر ليمثل العمود u فإنه يمكن تصميم دائرة بسيطة لهذه العملية كما هو مبين بشكل ٢-٤. (لاحظ أن المصباح " u " لا يضيء إلا إذا كان أحد

المفتاحين موصلًا والآخر غير موصل). ومن ناحية أخرى نلاحظ أن العمود c يطابق xy (أي $x \wedge y$) والعمود u يطابق $y \vee x'$. إذن الدائرة المنطقية التي تحقق عملية الجمع هي كالآتي (شكل ٣-٤):



شكل ٣-٤

وتسمى هذه الدائرة نصف آلة جمع *half adder* نظرا لأنها تستطيع جمع عددين يتكون كل منهما من رقم واحد؛ ولكن ماذا عن جمع عددين مثل $(1101)_2$ ، $(1011)_2$ ؟ عند جمع الخانة الأولى فإن الناتج يكون ١٠ أى 0 يكتب فى الخانة الأولى والباقى 1 يحمل على الخانة الثانية وعند جمع الخانة الثانية فإن ناتج جمع $1+0+1$ يكون 10 أى صفرا والباقى 1 يحمل على الخانة الثالثة... وهكذا، ولهذا يلزمنا جدول لجمع ثلاثة أرقام أحدها x والثانى y والثالث z (المحمول من الخانة السابقة). وهذا الجدول يتكون من ثمانية صفوف وهو كالاتى:

x	y	z	$x+y$	c	u
1	1	1	11	1	1
1	1	0	10	1	0
1	0	1	10	1	0
1	0	0	01	0	1
0	1	1	10	1	0
0	1	0	01	0	1
0	0	1	01	0	1
0	0	0	00	0	0

نلاحظ من هذا الجدول أن:

$$c = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

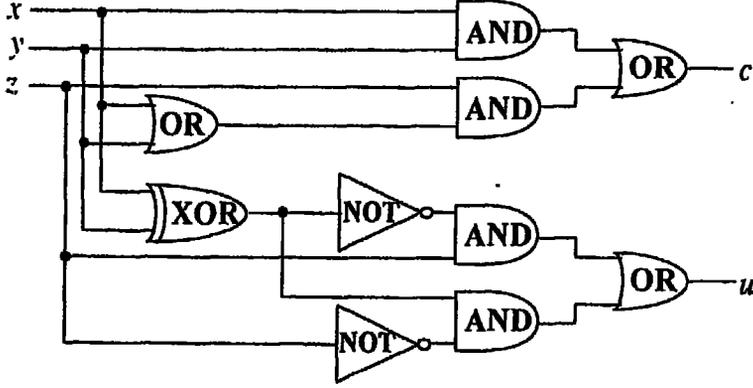
$$u = xyz + x'yz + xy'z + xyz'$$

وقد سبق لنا اختزال كل من التقريرين u ، c كالاتى:

$$c = xy + yz + xz = xy + z(x + y)$$

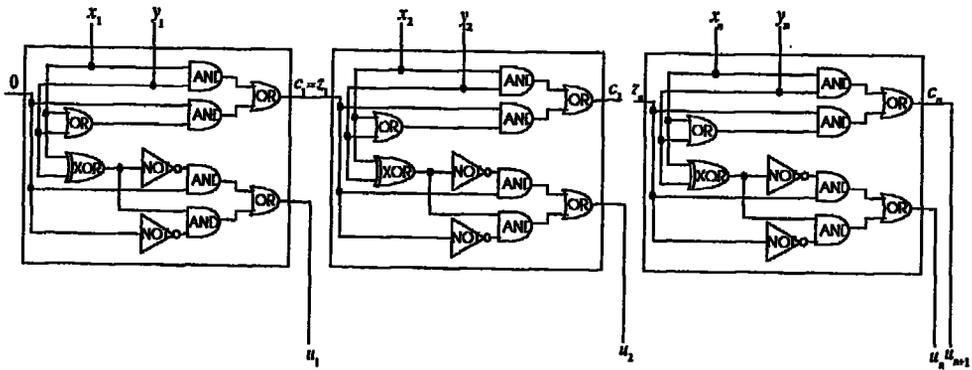
$$u = z(xy' + x'y)' + z'(xy' + x'y) = z(x \vee y)' + z'(x \vee y)$$

والدائرة الآتية (شكل ٤-٤) تسمى التجميع الكاملة *full adder*:



شكل ٤-٤

وحتى الآن استطعنا أن نجمع رقمين أو رقمين بالإضافة إلى رقم محمول ولكننا لم نجمع عدداً بأكمله؛ وفي هذه العملية نريد أن نجمع رقمين ونسجل أول رقم من ناتج الجمع ونُرَحِّل الرقم للثاني إلى الخانة التالية لنجمعه على الرقمين التاليين وهكذا. ولهذا الغرض تصمم الدائرة الآتية التي تصلح لجمع عددين كل منهما مكون من n من الأرقام (شكل ٥-٤):



شكل ٥-٤

١١-٤ تصميم آلة ضرب ثنائي Binary Multiplier

لضرب رقمين ثنائيين x ، y نستخدم الجدول الآتي:

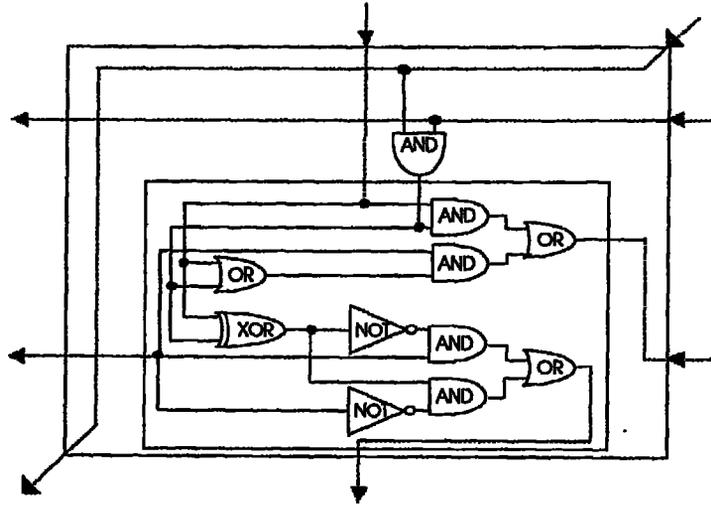
x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

وهو نفس جدول $x \wedge y$. ولهذا فإن الدائرة البسيطة الآتية (شكل ٦-٤) تفي بهذا الغرض:



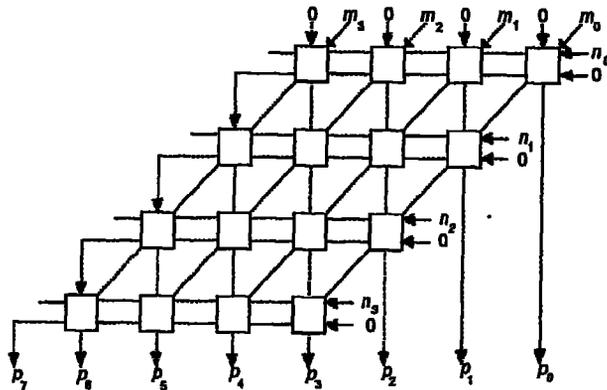
شكل ٦-٤

أما إذا أردنا ضرب عددين ثنائيين كل منهما مكون من عدة أرقام فإن الدائرة المطلوبة ستكون أعقد بكثير من تلك الدائرة إذ هي مزيج من دوائر الجمع والضرب. والخطوة الأولى لتصميم تلك الدائرة هي تصميم وحدة تشمل عمليتي الجمع والضرب (أنظر شكل ٧-٤):



شكل ٧-٤

والدائرة الآتية (شكل ٨-٤) تصلح لضرب عدد مكون من أربعة أرقام $n_0 n_1 n_2 n_3$ يعطى حاصل الضرب في آخر مكون من أربعة أرقام $m_0 m_1 m_2 m_3$ حاصل الضرب $p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7$:



شكل ٨-٤

ولنا أن تصور آلاف بل ملايين مثل هذه الدائرة داخل الحاسب الآلى خاصة إذا كانت العمليات المطلوبة أعقد من هاتين العمليتين البسيطتين وهما جمع أو ضرب عددين ثنائيين! فسبحان من هدى الإنسان إلى تلك الوسائل وأعطاه القدره على تطويرها، وسبحان من خلق بلايين الخلايا فى مخ الانسان ليكون قادراً على هذا الإبتكار وهذا التطوير.

٤ - ١٢ الكود الثنائى Binary Codes

كيف تتعامل الحاسبات وآلات التلغراف الكاتب مع الكلمات العادية؟ لابد كما أوضحنا أن يكون ذلك من خلال النظام الثنائى حيث أن الدوائر الالكترونية للحاسب مصممة على هذا الأساس. وعادة نستخدم أعدادا ثنائية مكونة من ثمانية أرقام للدلالة على الحروف والرموز المختلفة حسب نظام عالمى يسمى *American Standard Code for Information Interchange* ويرمز له عادة بالرمز "ASCII"؛ والجدول الآتى يعطى أمثلة من هذا الكود:

الرمز	الكود	اللكافى العشرى
A	01000001	65
B	01000010	66
C	01000011	67
.....		
0	00110000	48
1	00110001	49
2	00110010	50
.....		
*	00101010	42
+	00101011	43
.....		

وكل رقم ثنائي من أرقام الكود يسمى "Bit" وكل مجموعة مكونة من ثمانية أرقام ثنائية تسمى "Byte" والكلمة "Word" في لغة الحاسب قد تكون مكونة من ٨ أو ١٦ أو ٣٢ أو ٦٤ "Bit" ويعتمد ذلك على الجيل الذي ينتمى إليه الحاسب.

٤-١٢-١ الكود المصحح Correction Code

وخوفا من إرسال بيانات محتوية على أخطاء فلا بد من وجود كود يمكننا من اكتشاف تلك الأخطاء. ويرجع الفضل للعالم الرياضى Hamming لإيجاد كود للتصحيح يعرف باسمه سنبسطة في الآتى:

(١) تتصور كودا ذا أربعة أرقام فقط (أى يصلح للغة ذات ستة عشر حرفا فقط):

$$0000, 0001, 0010, 0011, \dots, 1111$$

(٢) نزيد عدد الأرقام إلى سبعة أى أن كل "Byte" تكون سباعية بالصورة $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$ حيث كل من $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$ يساوى 0 أو 1.

(٣) نخصص الخانات رقم 3, 5, 6, 7 للمعلومات والخانات رقم 1, 2, 4, للتأكد من المعلومات حيث نختار الأرقام X_1, X_2, X_4 بحيث تحقق المعادلات الآتية:

$$\left. \begin{array}{l} X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = 0 \\ X_2 + X_3 + X_6 + X_7 = 0 \\ X_1 + X_3 + X_5 + X_7 = 0 \end{array} \right\} \text{بمقياس 2}$$

فمثلا الحرف 1001 فيه $X_3 = 1, X_5 = 0, X_6 = 0, X_7 = 1$ وبذلك تكون

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_4 = 1 \text{ أى أن الرمز } 1001 \text{ يرسل } 0011001.$$

هذه الطريقة يكتشف أى خطأ من رقم واحد بطريقة أوتوماتيكية. ليكن:

$$\left. \begin{array}{l} X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = i \\ X_2 + X_3 + X_6 + X_7 = j \\ X_1 + X_3 + X_5 + X_7 = k \end{array} \right\} \text{ بمقياس 2}$$

فإذا كان الرمز المرسل صوابا فإن كلا من i ، j ، k يساوى صفرا. أما إذا كان هناك خطأ ما فإن ذلك سينعكس على قيم i ، j ، k كالاتى:

الخانة التي حدث بها الخطأ	قيمة k	قيمة j	قيمة i
1	1	0	0
2	0	1	0
3	1	1	0
4	0	0	1
5	1	0	1
6	0	1	1
7	1	1	1

أما إذا كان هناك خطأ فى أكثر من موضع فإن ذلك يتطلب طرقا أصعب ليس هنا محل دراستها.

٤ - ١٣ نظم عد أخرى

تستخدم أحيانا نظم أخرى خلاف النظام الثنائى يكون فيها الأساس أرقام أخرى خلاف الرقم 2. وللتعبير عن أى عدد فى نظام عد معين نعبر عنه بدلالة قيمة الأساس المستخدم، فمثلا العدد 39 فى نظام العد السداسى *Hexagonal* الذى يقتصر على الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 يكتب كالاتى:

$$39 = 1 \times 6^2 + 0 \times 6^1 + 3 \times 6^0$$

∴ $39 = (103)_6$

ويمكن أن نحصل على النتيجة السابقة كالآتي:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 39 \\ 6 & 6 \text{ (الباقى 3)} \\ 6 & 1 \text{ (الباقى 0)} \\ & 0 \text{ (الباقى 1)} \end{array}$$

مثال

أكتب العدد 234 بنظام العد السباعى (لاحظ أنه في هذا النظام تستخدم الأرقام (٠،١،٢،٣،٤،٥،٦).

الحل

$$\begin{array}{r|l} 7 & 234 \\ 7 & 33 \text{ (الباقى 3)} \\ 7 & 4 \text{ (الباقى 5)} \\ & 0 \text{ (الباقى 4)} \end{array}$$

$$\therefore 234 = (453)_7$$

وأشهر أنظمة للعد هي النظام الرباعى *tetral* و الثمانى *octal* و الست عشرى *hexadecimal* والتي سنفصلها فيما يلى:

٤-١٣-١ النظام الرباعى

في هذا النظام نستخدم الأرقام ٠، ١، ٢، ٣ ويكون الأساس الذى نحسب

عليه هو الرقم 4. والجدول الآتى يبين المكافئ الرباعى والمكافئ الثنائى لكل من هذه الأرقام:

المكافئ الثنائي	المكافئ الرباعي	الرقم
00	0	0
01	1	1
10	2	2
11	3	3

التحويل من النظام العشري إلى النظام الرباعي

للتحويل من النظام العشري إلى النظام الرباعي نستخدم إحدى الطريقتين الآتيتين:

- الطريقة الأولى: بالقسمة على 4 وأخذ البواقي.
- الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائي.

مثال

حول العدد 295 إلى النظام الرباعي.

الحل

الطريقة الأولى

4	295
4	73 (الباقى 3)
4	18 (الباقى 1)
4	4 (الباقى 2)
4	1 (الباقى 0)
	0 (الباقى 1)

$$\therefore 295 = (10213)_4$$

الطريقة الثانية

2	295
2	147 (الباقي 1)
2	73 (الباقي 1)
2	36 (الباقي 1)
2	18 (الباقي 0)
2	9 (الباقي 0)
2	4 (الباقي 1)
2	2 (الباقي 0)
2	1 (الباقي 0)
	0 (الباقي 1)

$$\therefore 295 = (10213)_4$$

وللتحويل من النظام الثنائي إلى النظام الرباعي فإننا نقسم العدد الثنائي إلى أزواج من الأرقام ابتداء من أقصى اليمين مع ملاحظة أنه في حالة احتواء العدد الثنائي على عدد فردي من الأرقام يوضع صفر في أقصى اليسار هكذا:

$$110010010011$$

ثم نضع المكافئ الرباعي لكل زوج هكذا:

$$\begin{array}{cccccc} 01 & 00 & 10 & 01 & 11 & \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & \end{array}$$

فيكون العدد الذي حصلنا عليه هو المكافئ الرباعي المطلوب.

$$\therefore 295 = (100100111)_2$$

ملحوظة

يمكن تحويل عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسرى إلى النظام الرباعي بنفس الطريقة المتبعة مع النظام الثنائي.

مثال

حول العدد $39\frac{11}{32}$ إلى النظام الرباعي.

الحل

الطريقة الأولى : بالقسمة على 4 وأخذ البواقي:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 39 \\ 4 & 9 \text{ (الباقى 3)} \\ 4 & 2 \text{ (الباقى 1)} \\ 4 & 0 \text{ (الباقى 2)} \end{array}$$

$$\therefore 39 = (213)_4$$

$$\frac{11}{32} = \frac{11 \times 2}{64} = \frac{22}{64} = \frac{16+4+2}{64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{2}{64} = (0.112)_4$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (213.112)_4$$

الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائي:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 39 \\ 2 & 19 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 9 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 4 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 2 \text{ (الباقى 0)} \\ 2 & 1 \text{ (الباقى 0)} \\ 2 & 0 \text{ (الباقى 1)} \end{array} \quad \therefore 39 = (100111)_2$$

$$39 = (100111)_2$$

$$\frac{11}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = (0.01011)_2$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (100111.01011)_2$$

وللتحويل للنظام الرباعي نقسم كل من الجزء الصحيح والكسر إلى أزواج مبتدئين بالعلامة هكذا:

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & 01 & 11 & . & 01 & 01 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & . & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (213.112)_4$$

التحويل من النظام الرباعي إلى النظام العشري
يمكن تحويل عدد من النظام الرباعي إلى النظام العشري بإحدى الطريقتين
الآتيتين:

- الطريقة الأولى: القيمة المكانية
- الطريقة الثانية : بواسطة التحويل إلى النظام الثنائي

مثال

حول العدد الرباعي $(2013.013)_4$ إلى النظام العشري.

الحل

نضع القيمة المكانية لكل رقم حسب خاتته هكذا:

$$\begin{aligned} (2013.013)_4 &= 3 \times 4^0 + 1 \times 4^1 + 2 \times 4^3 + 1 \times 4^{-2} + 3 \times 4^{-3} \\ &= 3 + 4 + 128 + \frac{1}{16} + \frac{3}{64} \\ &= 135\frac{7}{64} \end{aligned}$$

أو نضع المكافئ الثنائي لكل رقم بنفس ترتيبه هكذا:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 0 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 3 \\ 10 & 00 & 01 & 11 & . & 00 & 01 & 11 \end{array}$$

فيكون الناتج $(10000111.000111)_2$ هو تمثيل العدد بالنظام الثنائي، والذي يمكن تحويله إلى النظام العشري بسهولة كالآتي:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 66 & 134 & & & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} \\ \hline 2 & 4 & 8 & 16 & 33 & 67 & 135 & & & & & & & & \end{array}$$

فيكون الناتج هو $135\frac{7}{64}$.

الجمع رباعيا

نقصد بالجمع رباعيا تحويل كل من العددين إلى النظام الرباعي ثم جمعهما بالنظام الرباعي ثم تحويل الناتج إلى النظام العشري. لذلك نكون جدول الجمع الآتي:

+	0	1	2	3
0	00	01	02	03
1	01	02	03	10
2	02	03	10	11
3	03	10	11	12

مثال

اجمع $39\frac{7}{8} + 135\frac{17}{64}$ رباعيا وحقق الناتج عشريا.

011	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7

التحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني
للتحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني نستخدم إحدى الطريقتين
الآتيتين:

- الطريقة الأولى: بالقسمة على 8 وأخذ البواقي.
- الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثماني.

مثال

حول العدد 295 إلى النظام الثماني.

الحل

الطريقة الأولى

$$\begin{array}{r|l} 8 & 295 \\ 8 & 36 \text{ (الباقى 7)} \\ 8 & 4 \text{ (الباقى 4)} \\ & 0 \text{ (الباقى 4)} \end{array}$$

$$\therefore 295 = (447)_8$$

الطريقة الثانية

$$\begin{array}{r|l} 2 & 295 \\ 2 & 147 \text{ (الباقى 1)} \end{array}$$

2	73	(الباقي 1)
2	36	(الباقي 1)
2	18	(الباقي 0)
2	9	(الباقي 0)
2	4	(الباقي 1)
2	2	(الباقي 0)
2	1	(الباقي 0)
	0	(الباقي 1)

$$\therefore 295 = (447)_8$$

وللتحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني فإننا نقسم العدد الثنائي إلى ثلاثيات من الأرقام ابتداء من أقصى اليمين هكذا:

$$100 \ 100 \ 111$$

مع ملاحظة أنه في حالة احتواء العدد الثنائي على عدد من الأرقام لا يقبل القسمة على 3 فإننا نكمله بعدد مناسب من الأصفار في أقصى اليسار

ثم نضع المكافئ الثماني لكل ثلاثي هكذا:

$$100 \ 100 \ 111 \\ 4 \ 4 \ 7$$

فيكون العدد الذي حصلنا عليه هو المكافئ الثماني المطلوب.

$$\therefore 295 = (447)_8$$

ملاحظة
يمكن تحويل عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسرى إلى النظام الرباعي
بنفس الطريقة المتبعة مع النظام الثنائي.

مثال

حول العدد $39\frac{11}{32}$ إلى النظام الثماني .

الطريقة الأولى: بالقسمة على 8 وأخذ البواقي:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 39 \\ 8 & 4 \text{ (الباقى 7)} \\ & 0 \text{ (الباقى 4)} \end{array}$$

$$\therefore 39 = (47)_8$$

$$\frac{11}{32} = \frac{11 \times 2}{64} = \frac{22}{64} = \frac{16+6}{64} = \frac{2}{8} + \frac{6}{64} = (0.26)_8$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (47.26)_8$$

الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائي:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 39 \\ 2 & 19 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 9 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 4 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 2 \text{ (الباقى 0)} \\ 2 & 1 \text{ (الباقى 0)} \end{array}$$

(الباقى 1) 0

$$\therefore 39 = (100111)_2$$

$$\frac{11}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = (0.01011)_2$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (100111.01011)_2$$

وللتحويل للنظام الثماني نقسم كل من الجزء الصحيح والكسر إلى ثلاثيات مبتدئين بالعلامة هكذا:

$$\begin{array}{ccc} 100 & 111 & . & 010 & 110 \\ 4 & 7 & . & 2 & 6 \end{array}$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (47.26)_8$$

التحويل من النظام الثماني إلى النظام العشري

للتحويل من النظام الثماني إلى النظام العشري تتبع إحدى الطريقتين الآتيتين:

• الطريقة الأولى: القيمة المكانية

• الطريقة الثانية: بواسطة التحويل إلى النظام الثماني

مثال

حول العدد الثماني $(713.05)_8$ إلى النظام العشري.

الحل

الطريقة الأولى

نضع القيمة المكانية لكل رقم حسب خاتته هكذا:

$$(713.05)_8 = 3 \times 8^0 + 1 \times 8^1 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8^{-2}$$

- ١٥٦ -

$$= 3 + 8 + 7 \times 64 + \frac{5}{64}$$
$$= 459 \frac{5}{64}$$

الطريقة الثانية

نضع المكافئ الثنائي لكل رقم بنفس ترتيبه هكذا:

7 1 3 . 0 5

111 001 011 . 000 101

فيكون الناتج $2(111001011.000101)$ هو تمثيل العدد بالنظام

الثنائي، والذي يمكن تحويله إلى النظام العشري بسهولة كالاتي:

1 1 1 0 0 1 0 1 1 . 0 0 0 1 0 1

2 6 14 28 56 114 228 458 $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$

3 7 14 28 57 114 229 459

فيكون الناتج هو $459 \frac{5}{64}$.

الجمع ثمانيا

نقصد بالجمع ثمانيا تحويل كل من العددين إلى النظام الثماني ثم جمعهما بالنظام

الثماني ثم تحويل الناتج إلى النظام العشري. لذلك نكون جدول الجمع الآتي:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	00	01	02	03	04	05	06	07
1	01	02	03	04	05	06	07	10
2	02	03	04	05	06	07	10	11
3	03	04	05	07	07	10	11	12
4	04	05	06	07	10	11	12	13
5	05	06	07	10	11	12	13	14
6	06	07	10	11	12	13	14	15
7	07	10	11	12	13	14	15	16

مثال

إجمع $135\frac{17}{64} + 39\frac{7}{8}$ ثمانية وحقق الناتج عشريا.

الحل

$$135\frac{17}{64} = (207.21)_8 \quad , \quad 39\frac{7}{8} = (47.7)_8$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 0 \quad 7 \quad . \quad 2 \quad 1 \\ 4 \quad 7 \quad . \quad 7 \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \quad 5 \quad 7 \quad . \quad 1 \quad 1$$

$$\therefore 135\frac{17}{64} + 39\frac{7}{8} = (257.11)_8 = (10101111.001001)_2$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad . \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \underline{2 \quad 4 \quad 10 \quad 20 \quad 42 \quad 86 \quad 174} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{64} \\ 2 \quad 5 \quad 10 \quad 21 \quad 43 \quad 87 \quad 175 \end{array}$$

$$\therefore 135\frac{17}{64} + 39\frac{7}{8} = 175\frac{9}{64}$$

وهى نفس النتيجة التي كنا سنحصل عليها إذا أجرينا عملية الجمع عشريا مباشرة.

٤-١٣-٢ النظام الست عشري

في هذا النظام نستخدم الأرقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 بالإضافة إلى الحروف A، B، C، D، E، F ويكون الأساس الذي نحسب عليه هو العدد 16. والجدول الآتي يبين المكافئ العشري والمكافئ الثنائي لكل من هذه الأرقام:

الرقم	المكافئ العشري	المكافئ الثنائي
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	1000
5	5	1010
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

ويستخدم النظام الست عشري بكثرة في برامج الحاسب حيث أنه مختصر في كتابته عن النظام العشري كما أنه يسهل تذكره وتحويله إلى النظام الثنائي.

التحويل من النظام العشري إلى النظام الست عشري
للتحويل من النظام العشري إلى النظام الست عشري نستخدم إحدى
الطريقتين الآتيتين:

- الطريقة الأولى: بالقسمة على 16 و أخذ البواقي
 - الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائي
- مثال

حول العدد 299 إلى النظام الست عشري.

الحل

الطريقة الأولى

16		299	
16		18	(الباقى 11 أى
			(B
16		1	(الباقى 2)
		0	(الباقى 1)

$$\therefore 295 = (12B)_{16}$$

الطريقة الثانية

2		299	
2		149	الباقى 1
2		74	الباقى 1

2	37	0 الباقي
2	18	1 الباقي
2	9	(الباقي 0)
2	4	(الباقي 1)
2	2	(الباقي 0)
2	1	(الباقي 0)
	0	(الباقي 1)

$$\therefore 295 = (100101011)_2$$

وللتحويل من النظام الثنائي إلى النظام الست عشري فإننا نقسم العدد الثنائي إلى رباعيات من الأرقام ابتداء من أقصى اليمين (مع ملاحظة أنه في حالة احتواء العدد الثنائي على عدد من الأرقام لا يقبل القسمة على 4 فإننا نكملة بعدد مناسب من الأصفار في أقصى اليسار) هكذا:

0001 0010 1011

ثم نضع المكافئ الست عشري لكل رباعي هكذا:

0001 0010 1011

1 2 B

فيكون العدد الذي حصلنا عليه هو المكافئ الست عشري المطلوب.

$$\therefore 295 = (12B)_{16}$$

ملحوظة

يمكن تحويل عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسرى إلى النظام الرباعي بنفس الطريقة المتبعة مع النظام الثنائي.

مثال

حول العدد $39\frac{11}{32}$ إلى النظام الست عشري.

الحل

الطريقة الأولى: بالقسمة على ١٦ و أخذ البواقي:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 39 \\ 16 & 2 \text{ (الباقى 7)} \\ & 0 \text{ (الباقى 2)} \end{array}$$

$$\therefore 39 = (27)_{16}$$

$$\frac{11}{32} = \frac{11 \times 8}{256} = \frac{88}{256} = \frac{5 \times 16 + 8}{256} = \frac{5}{16} + \frac{8}{256} = (0.58)_{16}$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (27.58)_{16}$$

الطريقة الثانية: عن طريق التحويل إلى النظام الثنائي:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 39 \\ 2 & 19 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 9 \text{ (الباقى 1)} \\ 2 & 4 \text{ (الباقى 1)} \end{array}$$

- ١٦٢ -

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \text{ (الباقي 0)} \\ 2 & 1 \text{ (الباقي 0)} \\ & 0 \text{ (الباقي 1)} \end{array}$$

$$\therefore 39 = (100111)_2$$

$$\frac{11}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = (0.01011)_2$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (100111.01011)_2$$

وللتحويل للنظام الثماني نقسم كل من الجزء الصحيح والكسر إلى رباعيات مبتدئين بالعلامة هكذا:

$$\begin{array}{cccc} 0010 & 0111 & . & 0101 & 1000 \\ 2 & 7 & . & 5 & 8 \end{array}$$

$$\therefore 39\frac{11}{32} = (47.58)_{16}$$

التحويل من النظام الست عشري إلى النظام العشري

للتحويل من النظام الست عشري إلى النظام العشري تتبع إحدى الطريقتين الآتيتين:

• الطريقة الأولى: القيمة المكانية

• الطريقة الثانية: بواسطة التحويل إلى النظام الثنائي

مثال

حول العدد الست عشري $(7B3.1D)_{16}$ إلى النظام العشري.

الحل

الطريقة الأولى

نضع القيمة المكانية لكل رقم حسب خانته هكذا:

$$(7B3.1D)_{16} = 3 \times 16^0 + 11 \times 16^1 + 7 \times 16^2 + 1 \times 16^{-1} + 13 \times 16^{-2}$$
$$= 3 + 176 + 7 \times 256 + \frac{1}{16} + \frac{13}{256} = 1971 \frac{29}{256}$$

الطريقة الثانية

نضع المكافئ الثنائي لكل رقم بنفس ترتيبه هكذا:

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & B & 3 & . & 1 & D & \\ 0111 & 1011 & 0011 & . & 0001 & 1101 & \end{array}$$

فيكون الناتج $(11110110011.00011101)_2$ هو تمثيل العدد بالنظام الثنائي،

والذي يمكن تحويله إلى النظام العشري بسهولة كالآتي:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 14 & 30 & 60 & 122 & 246 & 492 & 984 & 1970 & & & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & & & \frac{1}{256} & & \\ 3 & 7 & 15 & 30 & 61 & 123 & 246 & 492 & 985 & 1971 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

فيكون الناتج هو $1971 \frac{29}{256}$.

الجمع ست عشريا

نقصد بالجمع ست عشريا تحويل كل من العددين إلى النظام الست عشري ثم جمعهما بالنظام الست عشري ثم تحويل الناتج إلى النظام العشري. لذلك نكون جدول الجمع الآتي:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F
1	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10
2	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11
3	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12
4	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13
5	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14
6	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15
7	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16
8	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1
C	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

مثال

اجمع $39\frac{7}{8} + 135\frac{17}{64}$ ست عشريا وحقق الناتج عشريا.

الحل

نحول كلا من العددين للنظام الست عشري فنجد:

$$135\frac{17}{64} = (87.44)_{16}$$

$$39\frac{7}{8} = (27.E)_{16}$$

أمثلة متنوعة

مثال (١)

حوّل العدد 576 إلى النظام الثماني والنظام الست عشري.

الحل

نحوّل العدد 576 أولاً إلى النظام الثنائي:

$$(110\ 111\ 101)_2 = 576$$

ثم نحول العدد $(110\ 111\ 101)_2$ إلى النظام الثماني كالآتي:

110	111	011
6	7	5

$$\therefore 576 = (675)_8$$

أما التحويل إلى النظام الست عشري فيكون كالآتي:

0001	1011	1101
1	B	D

$$\therefore 576 = (1BD)_{16}$$

مثال (٢)

حوّل العدد $(A8F.2B)_{16}$ إلى النظام الرباعي.

الحل

A	8	F	.	2	B
1010	1000	1111	.	0010	1011

$$\therefore (A8F.2B)_{16} = (101010001111.00101011)_2 = (222033.0223)_4$$

مثال (٣)

أكتب الكلمة AND بالكود ASCII ومن ثم اكتبها بالكود الست عشري.

الحل

الكود ASCII	الحرف
01000001	A
01001110	N
01000100	D

تكتب الكلمة AND بالصورة : 01000001 - 01001110 - 01000100

وبالكود الست عشري فإن AND تكتب بالصورة : 414E44

مثال (٤)

أجر عملية الجمع الآتية:

$$(72D9.1C)_{16} + (C868.2A1)_{16}$$

الحل

نحوّل كل عدد إلى النظام الثنائي كالتالي:

$$(72D9.1C)_{16} = (0111\ 0010\ 1101\ 1001.0001\ 1100)_2$$

$$(C868.2A1)_{16} = (1100\ 1000\ 0110\ 1000.0010\ 1010\ 0001)_2$$

ثم نجمع الجزأين الصحيحين ثنائيا كالتالي:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0

1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1

وبعد ذلك نجمع الجزأين الكسريين كالآتي:

1 1 1
 . 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
 . 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1

. 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1

ثم نضع المكافئ الست عشري لكل رباعي من الأرقام الثنائية كالآتي:

0001 0011 1011 0100 0001 . 0100 0110 0001
 1 3 B 4 1 . 4 6 1

∴ $(C 8 6 8.2A1)_{16} + (72D9.1C)_{16} = (13B41.461)_{16}$

طريقة أخرى

نجمع مباشرة باستخدام جدول الجمع للنظام الست عشري كالآتي:

1 . 1 1 1
 0 C 8 6 8 . 2 A 1
 0 7 2 D 9 . 1 C 0

1 3 B 4 1 . 4 6 1

∴ $(C 8 6 8.2A1)_{16} + (72D9.1C)_{16} = (13B41.461)_{16}$

تمرين (٤)

١. حوّل إلى الصورة العشرية كلا مما يأتي:
 $(1101.1011)_2$ ، $(12.13)_4$ ، $(4705)_8$ ، $(C9B)_{16}$ ، $(7Y)_{16}$
٢. حوّل العدد 3263 إلى النظم الآتية:
الثنائي - الرباعي - الثماني - الست عشري.
٣. حوّل العدد 6875.145 إلى النظم الآتية:
الثنائي - الرباعي - الثماني - الست عشري.
٤. حول كلا من الأعداد الآتية إلى الصورة الثنائية:
 $145.\bar{23}$ ، $325.\bar{5}$ ، $215\frac{13}{15}$
٥. أجز العمليات الآتية مستخدماً كل من النظام الثنائي والنظام الرباعي والنظام الثماني:
(أ) $625.000125 + 434.1796875$
(ب) $13\ 43 \times 23$
(ج) 15.2×5.625
٦. أكتب المكافئ الثنائي للكلمة LIST بكود ASCII .
٧. اجمع العددين $726.1625 + 6531.0625$ ست عشريا.
٨. اقسّم 1234 على 232 ثنائيا.
٩. أجز العمليات الآتية مستخدماً النظام الرباعي:
 $11+10+12$ ، $13+31$ ، 23×15

١٠. كود ثنائي مكون من سبعة أرقام $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$ خصصت أربعة منها وهي X_2, X_3, X_5, X_7 للمعلومات وثلاثة وهي X_1, X_4, X_6 للتصحيح بحيث:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 + X_2 + X_3 + X_5 = 0 \\ X_2 + X_4 + X_5 + X_7 = 0 \\ X_2 + X_5 + X_6 + X_7 = 0 \end{array} \right\} \text{مقياس ٢}$$

صحح الرسالة 1010011 - 1100101 - 1001010 علماً بأن الخطأ لا يحدث في أكثر من رقم واحد في الكلمة.

الباب الخامس

العلاقات

Relations

١-٥ الأزواج المرتبة Ordered Pairs

الزوج المرتب هو مجموعة من عنصرين، يميز أحدهما بأنه العنصر الأول. وحتى لا نخلط بين الزوج المرتب والمجموعة ذات العنصرين $\{a, b\}$ فإننا نكتب الزوج المرتب الذي يتكون من العنصرين a, b حيث a هو العنصر الأول بالصورة (a, b) ، أما الزوج المرتب الذي يتكون من نفس العنصرين a, b حيث b هو العنصر الأول فيكتب بالصورة (b, a) . وبوجه عام فإن:

$$(a, b) \neq (b, a)$$

في حين أن:

$$(a, b) = (b, a)$$

أيضا فإن:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

٢-٥ حاصل الضرب الكرتيزي Cartesian Product

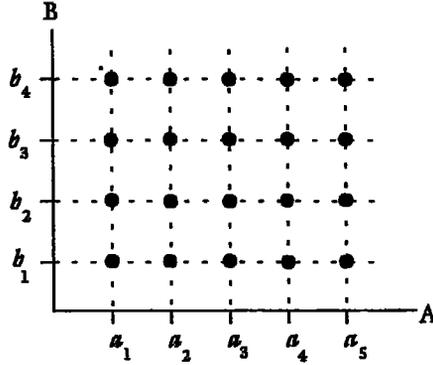
لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين. حاصل الضرب الكرتيزي $B \times A$ هو مجموعة عناصرها جميع الأزواج المرتبة التي ينتمي عنصرها الأول للمجموعة A وينتمي عنصرها الآخر للمجموعة B . أي أن:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

١-٢٠ تمثيل حاصل الضرب الكرتيزي Representation of Cartesian Products

لنفرض مجموعتين $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ، $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

يمثل حاصل الضرب الكرتيزي $B \times A$ بيانيا كما في شكل ١-٥.



شكل ١-٥

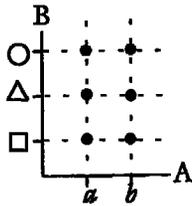
وتستخدم هذه الطريقة إذا كان عدد عناصر كل من المجموعتين A ، B محدودا.

مثال (١)

لتكن $A = \{a, b\}$ ، ولتكن $B = \{\Delta, \square, \circ\}$. أكتب حاصل الضرب الكرتيزي $B \times A$ ومثله بيانيا .

الحل

$$A \times B = \{(a, \Delta), (a, \square), (a, \circ), (b, \Delta), (b, \square), (b, \circ)\}$$



شكل ٢-٥

التمثيل البياني لحاصل الضرب الكرتيزي موضح في

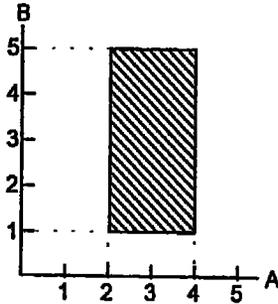
شكل ٢-٥.

مثال، (٢)

إذا كانت A هي الفترة $[2,4]$ وكانت B هي الفترة $[1,5]$ ، مثل حاصل الضرب الكرتيزي $B \times A$ بيانياً.

الحل

$$A \times B = \{(x,y) : x \in [2,4], y \in [1,5]\}$$



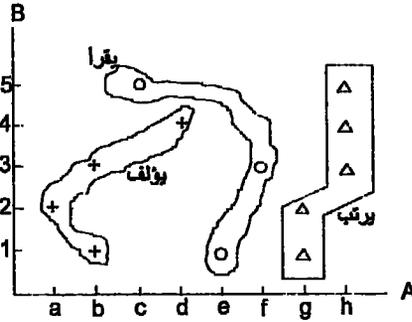
(لاحظ أن كلا من A ، B تحتوي على عدد لا نهائي من العناصر وكذلك حاصل الضرب الكرتيزي $A \times B$. ويبين شكل ٣-٥ التمثيل البياني لحاصل الضرب الكرتيزي $B \times A$.

وبوجه عام فإن $B \times A$ لا يساوي $A \times B$. ولا يحدث التساوي إلا إذا كانت $A = B$. وتسمى المجموعة $A \times A$ المربع الكرتيزي *Cartesian square* وتكتب A^2 .

٣-٥ العلاقة من مجموعة إلى مجموعة *Relation from a Set into a Set*
في كثير من الأحيان تقابلنا عبارات مثل: "أحمد والد مجدى"، "مجدى نجمل أحمد"، "4 أكبر من 3"، "2 عامل من عوامل 10"، "10 مضاعف للعدد 2"، ... كل من العبارات السابقة تحدد علاقة بين عنصرين. لتكن $a \in A$ ولتكن $b \in B$. إذا كان العنصر a على علاقة R بالعنصر b فإننا نكتب $a R b$.

مثال

لنفرض أننا دخلنا دارا للكتب فإن المجموعتين الرئيسيتين في هذه الدار هي مجموعة الأفراد $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ومجموعة الكتب $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. يمكن أن نكوّن عدة علاقات من المجموعة A إلى المجموعة B مثل "يقرا" "يؤلف" "يرتب"،... ويوضح شكل ٥-٤ بعض تلك العلاقات:



شكل ٥-٤

يلاحظ أن كل علاقة من تلك العلاقات هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكرتيزي $B \times A$. وهذا يقودنا إلى التعريف التالي:

لتكن A ، B مجموعتين غير خاليتين. أي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكرتيزي $B \times A$ تمثل علاقة \mathcal{R} من A إلى B ($\mathcal{R} \subset A \times B$).

٤-٥ طرق تمثيل العلاقات Methods of Representation of Relations

يمكن تمثيل العلاقة من مجموعة إلى مجموعة بعدة طرق منها:

١-٤-٥ الطريقة الكرتيزية Cartesian Representation

في هذه الطريقة يرسم حاصل الضرب الكرتيزي بيانيا كما سبق ثم توضع

علامات مختلفة كل منها توضح علاقة من العلاقات؛ فمثلا العلاقة "يقراً" في المثال السابق تمثلها الدوائر، والعلاقة "يؤلف" تمثلها علامة + ، والعلاقة "يرتب" تمثلها العلامة Δ كما في شكل ٤-٥.

٥-٤-٢ طريقة الحصر Roaster Method

في هذه الطريقة يتم كتابة الأزواج المرتبة التي تولف العلاقة بين قوسين؛ فمثلا العلاقات "يقراً" ، "يؤلف" ، "يرتب" في المثال السابق تكتب:

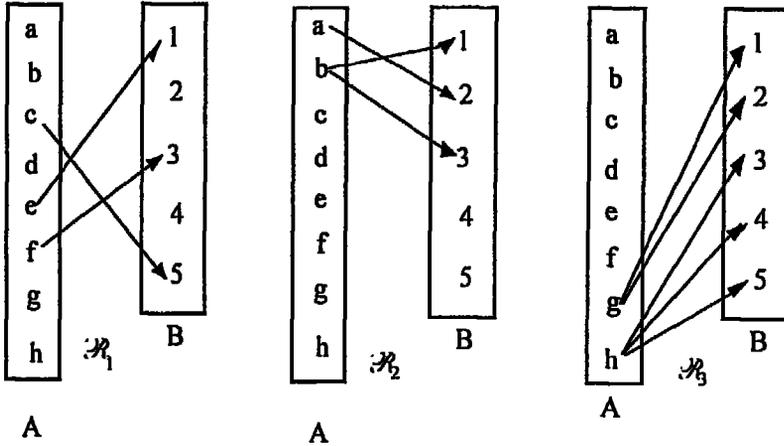
$$\mathcal{R}_1 = \{(c, 5), (e, 1), (f, 3)\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(a, 2), (b, 1), (b, 3)\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(g, 1), (g, 2), (h, 3), (h, 3), (h, 4), (h, 5)\}$$

٥-٤-٣ طريقة المخطط السهمي Arrow Method

تكتب عناصر المجموعتين في مستطيلين متقابلين. وإذا كان $a \mathcal{R} b$ فإننا نرسم سهما من a إلى b . ويبين شكل ٥-٥ المخططات السهمية للعلاقات $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ ،



شكل ٥-٥

٥-٤-٤ الطريقة المصفوفية Matrix Method

في هذه الطريقة إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوي m وعدد عناصر المجموعة B يساوي n فإننا نمثل أى علاقة R من A إلى B بمصفوفة ذات m من الصفوف، n من الأعمدة. لتكن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ، ولتكن $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. فإذا كان $(a_i, b_j) \in R$ فإن العنصر الذى فى الصف i والعمود j يساوى 1 أما إذا كان $(a_i, b_j) \notin R$ فإن العنصر الذى فى الصف i والعمود j يساوى صفراً. وتمثل المصفوفات الآتية العلاقات R_1, R_2, R_3 السابق تمثيلها بالطرق السابقة:

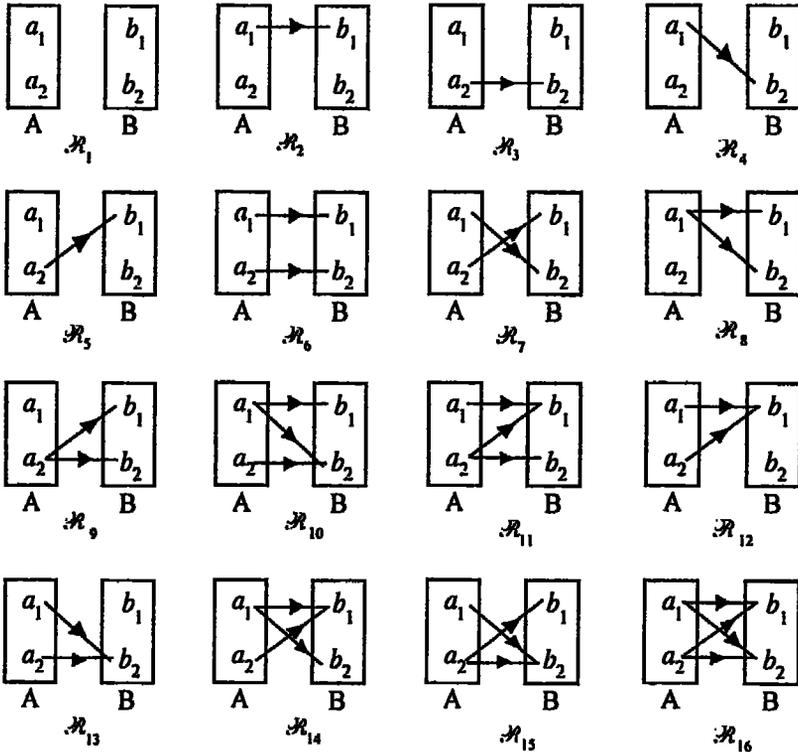
$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٥-٥ عدد العلاقات من مجموعة إلى مجموعة Number of Relations

لتكن A مجموعة عدد عناصرها 2 ولتكن B مجموعة عدد عناصرها 2. فإن حاصل الضرب الكرتيزي $A \times B$ يحتوي على $2 \times 2 = 4$ من الأزواج المرتبة (a, b) . أما عدد العلاقات التي يمكن تعريفها من A إلى B فيساوي عدد المجموعات الجزئية من حاصل الضرب الكرتيزي ويساوي 2^4 أي 16 ويشمل ذلك العدد العلاقة الخالية $\phi = \mathcal{R}_1$ والعلاقة الشاملة $\mathcal{R}_{16} = A \times B$. ويوضح

شكل ٦-٥ المخططات السهمية لتلك العلاقات:



شكل ٦-٥

كم من تلك العلاقات يحقق الشرط الآتي؟:

لكل $a \in A$ يوجد عنصر واحد فقط $b \in B$ بحيث $a \mathcal{R} b$.

سنجد الجواب لهذا السؤال هو:

العلاقات \mathcal{R}_6 ، \mathcal{R}_7 ، \mathcal{R}_{12} ، \mathcal{R}_{13} فقط تحقق هذا الشرط

لنفرض الآن أن عدد عناصر المجموعة A هو m وعدد عناصر المجموعة B هو n

فإن حاصل الضرب الكرتيزي $A \times B$ يحتوي على mn من الأزواج المرتبة، وتبعا

لذلك فإن عدد العلاقات التي يمكن تكوينها من A إلى B يساوي 2^{mn} ويشمل

هذا العدد العلاقة الخالية ϕ والعلاقة الشاملة $A \times B$. كم من تلك

العلاقات يحقق الشرط الآتي؟:

لكل $a \in A$ يوجد عنصر واحد فقط $b \in B$ بحيث $a \mathcal{R} b$.

سنجد الإجابة هي: n^m

٦-٥ العلاقة على مجموعة Relation on a Set

لتكن A مجموعة غير خالية. أى علاقة من المجموعة A إلى المجموعة A نفسها

تسمى علاقة على المجموعة A وتمثل العلاقة على مجموعة بالطريقة الآتية بالإضافة

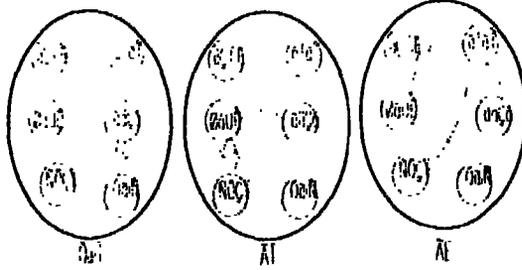
إلى الطرق السابقة:

مثال (١)

لنأخذ عائلة أفرادها هم "محمد، رشاد، طلعت، سمير، نادية، منال". يمكن أن

نكون علاقات على تلك المجموعة مثل "أب"، "أخ"، "زوج"، "ابن"، "ابنه"...

الخ. ويمكن تمثيل بعض هذه العلاقات بمخططات سهمية مبينة بشكل ٥-٧.



شكل ٧-٥

مثال (٢)

العلاقة "أكبر من" علاقة على مجموعة الأعداد {1, 2, 3, 4, 5} تمثل بالمخطط السهمي المبين بشكل ٨-٥.



شكل ٨-٥

٧-٥ أنواع العلاقات على مجموعة Types of Relations on a Set

هناك بعض أنواع خاصة من العلاقات على مجموعة نورد منها الآتي:

١-٧-٥ العلاقة العاكسة Reflexive Relation

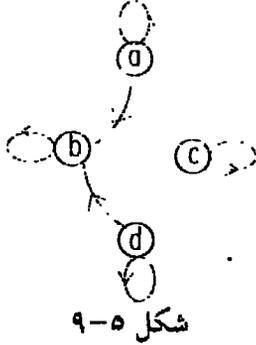
يقال أن العلاقة R عاكسة على المجموعة A إذا وفقط إذا كان:

$$a R a \quad \forall a \in A$$

فمثلا علاقة " $=$ " على مجموعة الأعداد الطبيعية هي علاقة عاكسة حيث أن كل عدد يساوى نفسه.

وكذلك علاقة " \leq " هي علاقة عاكسة على مجموعة الأعداد الطبيعية، ولكن

علاقة " $<$ " هي علاقة غير عاكسة على مجموعة الأعداد الطبيعية. مثل هذه



العلاقة تسمى لا عاكسة *irreflexive* حيث أن:
 n ليست أصغر من n لكل $n \in \mathbb{N}$.
 ويمكن اكتشاف أن علاقة ما عاكسة إذا كان في
 مخططها السهمي تظهر عقدة عند كل نقطة (أنظر
 شكل ٩-٥).

وإذا مثلنا العلاقة العاكسة بمصفوفة فإن عناصر القطر الرئيسي لابد أن تساوى
 1؛ فمثلا العلاقة المثلة بشكل ٩-٥ يكمن تمثيلها مصفوفيا كالاتي:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

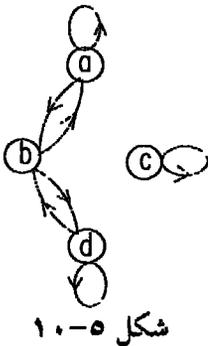
٥-٧-٢ العلاقة المتماثلة Symmetric Relation

يقال أن العلاقة \mathcal{R} متماثلة على A إذا وفقط إذا كان:

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$$

فمثلا علاقة "=" متماثلة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$m = n \Rightarrow n = m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$



ويمكن اكتشاف أن علاقة ما متماثلة إذا كان أى سهم يصل
 العنصر a بالعنصر b يقابله سهم آخر من b إلى a (أنظر
 شكل ١٠-٥).

وإذا مثلنا العلاقة المتماثلة بمصفوفة فإن العناصر المتساوية
 البعد عن القطر الرئيسي تكون متساوية؛ فمثلا العلاقة المثلة
 بشكل ١٠-٥ يمكن تمثيلها

مصفوفيا كالاتي:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

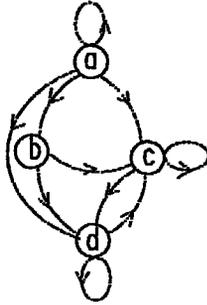
٣-٧-٥ العلاقة الناقلة Transitive Relation

يقال أن العلاقة \mathcal{R} ناقلة على A إذا وفقط إذا كان:

$$(a \mathcal{R} b), (b \mathcal{R} c) \Rightarrow (a \mathcal{R} c)$$

فمثلا علاقة "=" وعلاقة ">" كل منهما ناقلة على مجموعة الأعداد الطبيعية

(من السهل البرهنة على ذلك).



شكل ١١-٥

وفي المخطط السهمي لعلاقة ناقلة إذا وجد

سهم من a إلى b وسهم آخر من b إلى c فلا بد

أن يوجد سهم ثالث من a إلى c. (انظر شكل

١١-٥). ويمكن تمثيل العلاقة في شكل

١١-٥ مصفوفيا كالاتي:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٤-٧-٥ علاقة التكافؤ Equivalence Relation

يقال أن العلاقة \mathcal{R} هي علاقة تكافؤ على A إذا وفقط إذا كانت:

(أ) \mathcal{R} عاكسة على A،

(ب) \mathcal{R} متماثلة على A،

(ج) \mathcal{R} ناقله على A.

مثال (١)

علاقة "=" هي علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أنها تحقق
الثلاثة الشروط (أ) ، (ب) ، (ج).

مثال (٢)

علاقة "يوازي" "//" هي علاقة تكافؤ على مجموعة المستقيمات في المستوى
حيث أن:

(أ) كل مستقيم يوازي نفسه،

(ب) إذا وازى المستقيم ل المستقيم م فإن المستقيم م يوازي المستقيم ل.

(ج) المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.

مثال (٣)

أثبت أن العلاقة \mathcal{R} المعرفة على مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الطبيعية
 \mathbb{N}^2 كالآتي:

$$(m, n) \mathcal{R} (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$$

هي علاقة تكافؤ.

الحل

$$(أ) (m, n) \mathcal{R} (m, n) \text{ لأن } m + n = n + m.$$

إذن العلاقة \mathcal{R} عاكسة.

$$(ب) (m, n) \mathcal{R} (m', n') \Rightarrow (m', n') \mathcal{R} (m, n) \text{ لأن:}$$

$$(m, n) \mathcal{R} (m', n') \Rightarrow m + n' = n + m'$$

- ١٨٣ -

$$\Rightarrow m' + n = m + n' = n' + m$$

$$\Rightarrow (m', n') \mathcal{R} (m, n)$$

إذن العلاقة \mathcal{R} : متماثلة.

(ج) العلاقة \mathcal{R} ناقله لأن:

$$(m, n) \mathcal{R} (m', n') \wedge (m', n') \mathcal{R} (m'', n'')$$

$$\Rightarrow (m + n' = n + m') \wedge (m' + n'' = n' + m'')$$

$$\Rightarrow m + n' + m' + n'' = n + m' + n' + m''$$

$$\Rightarrow m + n'' = n + m'' \Rightarrow (m, n) \mathcal{R} (m'', n'')$$

٨-٥ فصول التكافؤ Equivalence Classes

لتكن \mathcal{R} علاقة تكافؤ على المجموعة A وليكن $a \in A$. تسمى المجموعة:

$$\{b : b \in A, b \mathcal{R} a\}$$

فصل تكافؤ *equivalence class* يحتوي العنصر a بالنسبة للعلاقة \mathcal{R} ويرمز له

بالرمز \mathcal{R}_a .

مثال (١)

أثبت أن العلاقة الآتية على المجموعة $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ علاقة تكافؤ:

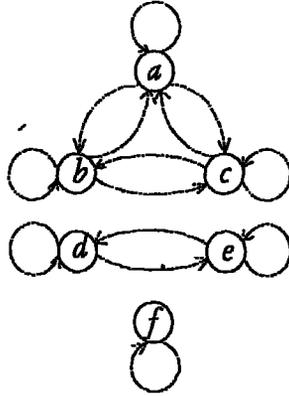
$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a),$$

$$(c, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e), (f, f)\}$$

وأوجد فصول التكافؤ.

الحل

شكل ١٢-٥ يبين العلاقة \mathcal{R} .

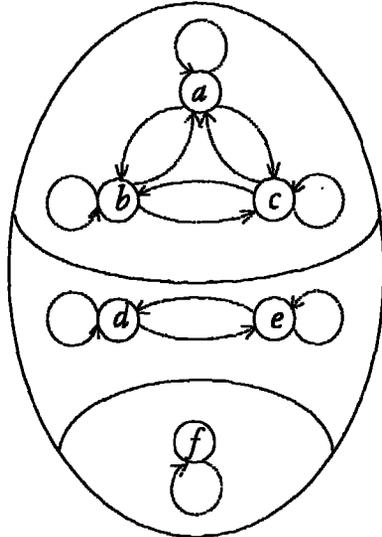


شكل ١٢-٥

من الشكل نجد أن العلاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة. إذن فهي علاقة تكافؤ.
فصول التكافؤ لهذه العلاقة هي:

$$\mathcal{E}_R(a) = \{a, b, c\}, \quad \mathcal{E}_R(d) = \{d, e\}, \quad \mathcal{E}_R(f) = \{f\}$$

نلاحظ أن فصول التكافؤ هذه تكون تجزيفا على المجموعة A (أنظر شكل ١٣-٥).



شكل ١٣-٥

وستثبت الآن أن هذه خاصية عامة طبقا للنظرية الآتية:
نظرية

لتكن \mathcal{R} : علاقة تكافؤ على A . فإن فصول التكافؤ الناتجة من العلاقة تكوّن تجزئًا للمجموعة A .

البرهان

ليكن $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(a)$ فصل تكافؤ يحتوي العنصر a ، وليكن $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(b)$ فصل تكافؤ يحتوي العنصر b . إذا كان $a \mathcal{R} b$ فإن $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(a) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(b)$. أما إذا كان $a \not\mathcal{R} b$ فإن $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(a) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(b) = \emptyset$. وبذلك يتحقق شرط التباعد. وبأخذ جميع عناصر المجموعة A فإن $\bigcup_{a \in A} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(a) = A$. وبذلك يتحقق شرط

الشمول. ويتحقق الشرطين فإن النظرية تثبت.

عكس النظرية

ليكن \mathcal{D} تجزئًا على مجموعة A . فإن هذا التجزئ ي عرّف علاقة تكافؤ \mathcal{R} على A كالآتي:

$a \mathcal{R} b$ إذا كان a, b ينتميان لنفس القسم.

- (أ) العلاقة عاكسة حيث أن أي عنصر ينتمي لنفس القسم الذي يحتويه. أي أن:
$$a \mathcal{R} a \quad \forall a \in A$$
- (ب) العلاقة متماثلة حيث أنه إذا كان $a \mathcal{R} b$ فإن b تنتمي لنفس القسم الذي تنتمي إليه a . إذن $a \mathcal{R} b$.
- (ج) العلاقة ناقلة حيث أنه إذا كان $a \mathcal{R} b$ ، $b \mathcal{R} c$ فإن b تنتمي لنفس القسم

الذى تنتمى إليه a ، c تنتمى لنفس القسم الذى تنتمى إليه b . إذن c تنتمى
لنفس القسم الذى تنتمى إليه a . أى $c \mathcal{R} a$.

مثال (٢)

لتكن " ~ " معرفة على $N \times N$ كالآتى:

$$[(m, n) \sim (p, q)] \Leftrightarrow [m + q = n + p]$$

أثبت أن العلاقة " ~ " علاقة تكافؤ وأوجد فصول التكافؤ.

الحل

(أ) حيث أن $m + n = n + m$ ، إذن $(m, n) \sim (m, n)$

(١) ∴ العلاقة " ~ " عاكسة على $N \times N$

(ب) حيث أن:

$$m + q = n + p \Rightarrow p + n = q + m$$

إذن

$$(m, n) \sim (p, q) \Rightarrow (p, q) \sim (m, n)$$

(٢) ∴ العلاقة " ~ " متماثلة على $N \times N$

(ج) حيث أن:

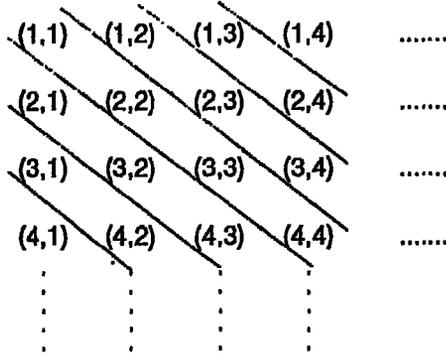
$$m + q = n + p , p + s = q + r \Rightarrow m + s = n + r$$

إذن

$$[(m, n) \sim (p, q)] , [(p, q) \sim (r, s)] \Rightarrow [(m, n) \sim (r, s)]$$

(٣) ∴ العلاقة " ~ " ناقلة على $N \times N$

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن العلاقة " ~ " هي علاقة تكافؤ على $N \times N$.
وبكتابة $N \times N$ بالصورة:



نجد أن فصول التكافؤ هي:

$$\begin{aligned} [4,1] &= \{(4,1), (5,2), (6,3), (7,4), \dots\}, \\ [3,1] &= \{(3,1), (4,2), (5,3), (6,4), \dots\}, \\ [2,1] &= \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), \dots\}, \\ [1,1] &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), \dots\}, \\ [1,2] &= \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), \dots\}, \\ [1,3] &= \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), \dots\}, \\ [1,4] &= \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), \dots\}, \end{aligned}$$

مثال (٣)

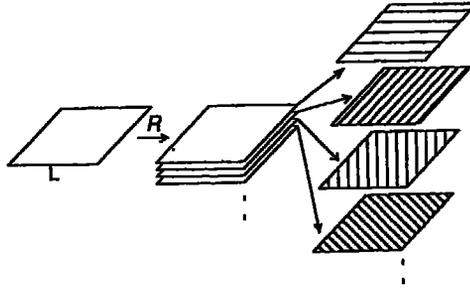
لتكن L مجموعة المستقيمات في المستوى ولتكن $///$ هي علاقة التوازي على L . أثبت أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ ووضح فصول التكافؤ.

الحل

- (أ) العلاقة $///$ عاكسة على L حيث أن أي مستقيم يوازي نفسه.
(ب) العلاقة $///$ متماثلة على L حيث أنه إذا وازى المستقيم h المستقيم h فإن

المستقيم l يوازي المستقيم m .

(ج) العلاقة $|||$ ناقله على L حيث أن المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان. العلاقة $|||$ هي علاقة تكافؤ على L . فصول التكافؤ الناتجة من هذه العلاقة هي مجموعات مستقيمات متوازية يقال لها تحاذيات، كل تحاذي يوازي مستقيما معينا (انظر شكل ١٤-٥).



شكل ١٤-٥

٩-٥ علاقة الترتيب الجزئي Partial Order Relation

يقال أن العلاقة \mathcal{R} هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة A إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية مجتمعة:

(أ) \mathcal{R} عاكسة على A .

(ب) \mathcal{R} شبه متماثلة على A .

(ج) \mathcal{R} ناقله على A .

مثال (١)

أثبت أن العلاقة \leq هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد الطبيعية

.N

الحل

(أ) العلاقة " \leq " عاكسة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن كل عدد طبيعي أصغر من أو يساوي نفسه.

(ب) العلاقة " \leq " شبه متماثلة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$[(m \leq n) \wedge (n \leq m)] \Rightarrow m = n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

(ج) العلاقة " \geq " ناقله على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$[(m \leq n) \wedge (n \leq p)] \Rightarrow (m \leq p) \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}$$

إذن فالعلاقة " \leq " هي علاقة ترتيب جزئية على مجموعة الأعداد الطبيعية.

مثال (٢)

أثبت أن العلاقة " \subset " هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة القوة 2^A لأي مجموعة اختيارية A .

الحل

(أ) العلاقة " \subset " عاكسة على 2^A حيث أن كل مجموعة هي مجموعة جزئية (غير فعلية) من نفسها. أي أن:

$$X \subset X \quad \forall X \in 2^A$$

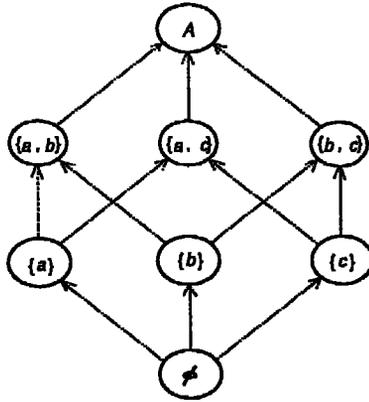
(ب) العلاقة " \subset " شبه متماثلة على 2^A حيث أن:

$$[(X \subset Y) \wedge (Y \subset X)] \Rightarrow (X = Y) \quad \forall X, Y \in 2^A$$

(ج) العلاقة " \subset " ناقله على 2^A حيث أن:

$$(X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Rightarrow (X \subset Z) \quad \forall X, Y, Z \in 2^A$$

وبين شكل (٥-١٥) الشكل المتجه لتلك العلاقة عندما تكون $A = \{a, b, c\}$.



شكل ٥-١٥

١٠-٥ علاقة الترتيب الكلي Total Order Relation

يقال أن العلاقة \mathcal{R} هي علاقة ترتيب كلي على A إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان مجتمعين:

- (أ) \mathcal{R} علاقة ترتيب جزئي على A .
(ب) لكل عنصرين a, b ينتميان للمجموعة A فإن أحدهما لابد أن يكون على علاقة \mathcal{R} مع الآخر. أي أن:

$$(a \mathcal{R} b) \vee (b \mathcal{R} a) \quad \forall a, b \in A$$

مثال (١)

أثبت أن العلاقة "عامل من عوامل" هي علاقة ترتيب جزئي فقط على مجموعة الأعداد الطبيعية N .

الحل

(أ) كل عدد طبيعي عامل من عوامل نفسه.

∴ العلاقة عاكسة

(١)

(ب) إذا كان m عامل من عوامل n فليس من الضروري أن تكون n عامل من

عوامل m . إذن العلاقة ليست متماثلة؛ ولكن إذا حدث ذلك فإن $m = n$.

∴ العلاقة شبه متماثلة (٢)

(ج) إذا كان m عامل من عوامل n ، n عامل من عوامل p فإن m عامل من عوامل p .

∴ العلاقة ناقلة (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن العلاقة "عامل من عوامل" هي علاقة ترتيب جزئي على N . وإذا أخذنا أى عددين طبيعيين m ، n فليس من الضروري أن يكون أحدهما عامل من عوامل الآخر.

∴ العلاقة "عامل من عوامل" هي علاقة ترتيب جزئي فقط على N .

مثال (٢)

أى من العلاقاتين " \subset " ، " \leq " علاقة ترتيب كلي؟

الحل

واضح أن الشرط الثاني لا ينطبق على العلاقة " \subset " في المثال السابق، وعلى

سبيل المثال فإن: $\{a, c\} \not\subset \{b, c\}$ ، $\{a, c\} \not\subset \{b\}$

c ، إذن العلاقة " \subset " ليست علاقة ترتيب كلي على 2^A . واضح أيضا أن

العلاقة " \geq " علاقة ترتيب كلي على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث أن:

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) (m \leq n) \vee (n \leq m)$$

١١-٥ علاقة الترتيب القاطع Strict Order Relation

يقال أن العلاقة \mathcal{R} هي علاقة ترتيب قاطع على مجموعة A إذا توفرت

الشروط الآتية:

(أ) \mathcal{R} لا عاكسة على A ،

(ب) \mathcal{R} ناقل على A ،

(ج) \mathcal{R} لا متماثلة على A .

ويمكن التغاضي عن الشرط (ج) حيث أنه يستتج من الشرطين (أ) ، (ب) [حاول أن تثبت ذلك].

وكمثال على علاقة الترتيب القاطعة نأخذ العلاقة " $>$ " على N فنجد أن:

(أ) " $>$ " لا عاكسة على A حيث أن $m < n \Rightarrow n < m$.

(ب) " $>$ " ناقل على A حيث أن $(m < n), (n < p) \Rightarrow (m < p)$. إذن العلاقة " $>$ " علاقة ترتيب قاطعة على N .

١٢-٥ مجال العلاقة ومداهما The Domain and Range of a Relation

لتكن $\mathcal{R} \subset A \times B$ علاقة من A إلى B . يُعرّف مجال العلاقة \mathcal{R} بأنه المجموعة الجزئية من A التي تظهر عناصرها كعنصر أول في الزوج المرتب $(a,b) \in \mathcal{R}$. ويرمز لمجال العلاقة \mathcal{R} بالرمز $\text{Dom}(\mathcal{R})$. كما يُعرّف مدى العلاقة \mathcal{R} بأنه المجموعة الجزئية من B التي تظهر عناصرها كعنصر ثان في الزوج المرتب $(a,b) \in \mathcal{R}$. ويرمز لمدى العلاقة \mathcal{R} بالرمز $\text{Ran}(\mathcal{R})$.

مثال (١)

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، ولتكن $B = \{a,b,c\}$. أكتب مجال ومدى كل من العلاقات الآتيتين:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,a), (1,b), (2,b), (3,a), (4,a)\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,a), (1,c), (3,a), (3,c)\}$$

الحل

$$\text{Dom} (\mathcal{R}_1) = \{1,2,3,4\} \quad , \quad \text{Ran} (\mathcal{R}_1) = \{a,b\},$$

$$\text{Dom} (\mathcal{R}_2) = \{1,3,4\} \quad , \quad \text{Ran} (\mathcal{R}_2) = \{a,c\}.$$

١٣-٥ مسار العلاقة على مجموعة Path of a Relation on a Set
لتكن \mathcal{R} علاقة على المجموعة A . ي عرف المسار الذى طول له n والذى يبدأ
من العنصر $a \in A$ وينتهى بالعنصر $b \in A$ بأنه المتتابعة $(a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b)$
بحيث:

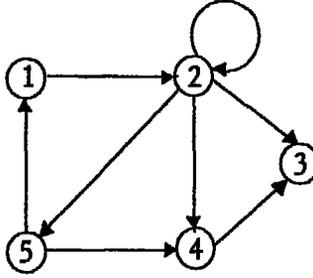
$$a \mathcal{R} x_1 , x_1 \mathcal{R} x_2 , \dots , x_{n-1} \mathcal{R} b$$

مثال

لنأخذ العلاقة \mathcal{R} المعرفة على المجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ كالآتى:

$$\mathcal{R} = \{(1,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (4,3) , (5,1) , (5,4)\}$$

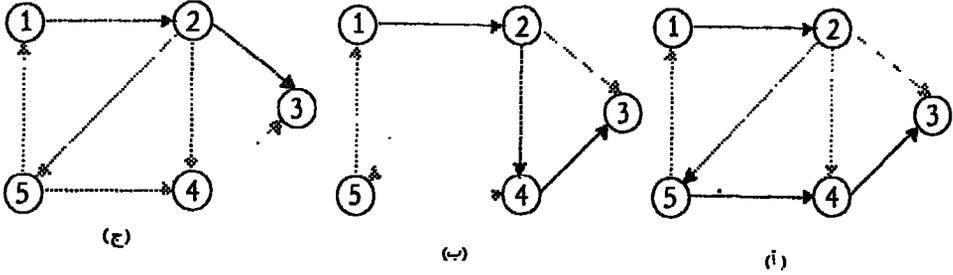
والممثلة بالشكل الاتجاى ١٦-٥.



شكل ١٦-٥

- من الشكل نجد أن لدينا ثلاثة مسارات من العنصر 1 إلى العنصر 3:
- المسار $\pi_1 = (1,2,5,4,3)$ وطوله 4 وهو مبين بشكل ١٧-٥ (أ).
- المسار $\pi_2 = (1;2,4,3)$ وطوله 3 وهو مبين بشكل ١٧-٥ (ب).

المسار $\pi_3 = (1,2,3)$ وطوله 2 وهو مبين بشكل ١٧-٥ (ج).



شكل ١٧-٥

١٤-٥ الدورات Cycles

المسار الذي يبدأ وينتهي من نفس الرأس يسمى دورة *Cycle*؛ ففي المثال السابق المسار:

$$\pi_4 = (1,2,5,1)$$

هو دورة طولها 3 في حين أن المسار:

$$\pi_5 = (2,2)$$

هو دورة طولها 1.

١٥-٥ العمليات على العلاقات Operations on Relations

نستطيع أن نكون علاقات جديدة بإجراء بعض العمليات كالاتي:

١-١٥-٥ العلاقة المكملة Complementary Relation

لتكن \mathcal{R} علاقة من A إلى B . تُعرف العلاقة المكملة \mathcal{R}' من A إلى B كالاتي:

$$a \mathcal{R}' b \Leftrightarrow a \mathcal{R} b \quad \forall a \in A, b \in B$$

وإذا كانت $M_{\mathcal{R}}$ هي المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة \mathcal{R} فإن المصفوفة

المنطقية $M_{\mathcal{R}}$ الممثلة للعلاقة المكتملة \mathcal{R}^{-1} . تستنتج من $M_{\mathcal{R}}$ باستبدال 1
بـ 0 ، 0 بـ 1 .

مثال

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، ولتكن \mathcal{R} علاقة من A إلى B
معرفة كالآتي:

$$\mathcal{R} = \{(1, b), (1, c), (2, c), (3, a), (4, b)\}$$

أوجد العلاقة المكتملة واكتب مصفوفتها المنطقية.

مثال

المصفوفة المنطقية للعلاقة \mathcal{R} هي:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة المنطقية للعلاقة \mathcal{R} هي:

$$M_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن فالعلاقة المكتملة \mathcal{R}^{-1} تعرف كالآتي:

$$\mathcal{R}' = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b), (3, c), (4, a), (4, c)\}$$

٢-١٥-٥ معكوس العلاقة Inverse Relation

لتكن \mathcal{R} علاقة من A إلى B . فإن معكوس العلاقة \mathcal{R}^{-1} هي علاقة من B

إلى A تُعرف كالآتي:

$$\underline{b: \mathcal{R}^{-1}a \Leftrightarrow a \mathcal{R} b \quad \forall a \in A, b \in B}$$

وإذا كانت $M_{\mathcal{R}}$ هي المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة \mathcal{R} فإن المصفوفة المنطقية $M_{\mathcal{R}^{-1}}$ لمعكوس العلاقة هي مدور المصفوفة $M_{\mathcal{R}}$. أى أن:

$$M_{\mathcal{R}^{-1}} = (M_{\mathcal{R}})^T$$

ففى المثال السابق:

$$M_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا فإن:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(a,3), (b,1), (b,4), (c,1), (c,2)\}$$

٣-١٥-٥ علاقة الاتحاد Union Relation

لتكن كلا من \mathcal{R} ، \mathcal{S} علاقة من A إلى B . تُعرف علاقة الاتحاد $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ من A إلى B كالآتى:

$$\underline{a (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) b \Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ أو } a \mathcal{S} b \quad \forall a \in A, b \in B}$$

وإذا كانت $M_{\mathcal{R}}$ هي المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة \mathcal{R} ، $M_{\mathcal{S}}$ هي المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة \mathcal{S} فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة الاتحاد $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ هي مصفوفة الوصل $M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{S}}$.

مثال

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، ولتكن \mathcal{R} ، \mathcal{S} علاقتين من A إلى B معرفتين كالآتى:

$$\mathcal{R} = \{(1,b), (1,c), (2,c), (3,a), (4,b)\}$$

$$r = \{(1,a), (1,b), (2,b), (2,c), (3,b), (4,a)\}$$

أوجد علاقة الاتحاد $R \cup S$ ومصفوفتها المنطقية.

الحل

المصفوفة المنطقية للعلاقين R, S ، هما على الترتيب:

$$M_{R'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{S'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المنطقية لعلاقة الاتحاد هي:

$$M_{R \cup S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن فعلاقة الاتحاد هي:

$$R \cup S = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (4,a), (4,b)\}$$

Intersection

٤-١٥-٥ علاقة التقاطع

لتكن كلا من R, S ، علاقة من A إلى B . تُعرف علاقة التقاطع $R \cap S$

S من A إلى B كالآتي:

$$a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb, aSb \quad \forall a \in A, b \in B$$

وإذا كانت $M_{R'}$ هي المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة R ، $M_{S'}$ هي

المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة S فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة التقاطع

$R \cap S$ هي مصفوفة الملتقى $M_{R'} \wedge M_{S'}$.

مثال

في المثال السابق مصفوفة المتقى هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن فإن علاقة التقاطع هي:

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(1,b), (2,c)\}$$

٥-١٥-٥ علاقات الفرق Difference Relations

لتكن كلا من \mathcal{R} ، \mathcal{S} علاقة من A إلى B . تُعرف علاقة الفرق $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ من A إلى B كالآتي:

$$a(\mathcal{R} - \mathcal{S})b \Leftrightarrow a\mathcal{R}b, a\mathcal{S}b \quad \forall a \in A, b \in B$$

وإذا كانت $M_{\mathcal{R}}$ هي المصفوفة المنطقية المثلة للعلاقة \mathcal{R} ، $M_{\mathcal{S}}$ هي المصفوفة المنطقية المثلة للعلاقة \mathcal{S} فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة الفرق $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ هي المصفوفة $M_{\mathcal{R}} \wedge M'_{\mathcal{S}}$. وبالمثل تُعرف علاقة الفرق $\mathcal{S} - \mathcal{R}$ من A إلى B كالآتي:

$$a(\mathcal{S} - \mathcal{R})b \Leftrightarrow a\mathcal{S}b, a\mathcal{R}b \quad \forall a \in A, b \in B$$

وإذا كانت $M_{\mathcal{R}}$ هي المصفوفة المنطقية المثلة للعلاقة \mathcal{R} ، $M_{\mathcal{S}}$ هي المصفوفة المنطقية المثلة للعلاقة \mathcal{S} فإن المصفوفة المنطقية لعلاقة الفرق $\mathcal{S} - \mathcal{R}$ هي المصفوفة $M'_{\mathcal{R}} \wedge M_{\mathcal{S}}$.

وتُعرَّف علاقة الفرق التماثل Δ كالآتي:

$$\underline{\mathcal{X} \Delta \mathcal{Y} = (\mathcal{X} - \mathcal{Y}) \cup (\mathcal{Y} - \mathcal{X})}$$

أما مصفوفتها المنطقية فهي:

$$M_{\mathcal{X} \Delta \mathcal{Y}} = M_{\mathcal{X} - \mathcal{Y}} \vee M_{\mathcal{Y} - \mathcal{X}} = (M_{\mathcal{X}} \wedge M'_{\mathcal{Y}}) \vee (M'_{\mathcal{X}} \wedge M_{\mathcal{Y}})$$

مثال

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، ولتكن \mathcal{R} ، \mathcal{S} علاقيتين من A إلى

B معرّفتين كالآتي:

$$\mathcal{R} = \{(1,b), (1,c), (2,c), (3,a), (4,b)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(1,a), (1,b), (2,b), (2,c), (3,b), (4,a)\}$$

أوجد علاقتي الفرق $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ ، $\mathcal{S} - \mathcal{R}$ ، والمصفوفة المنطقية لكل منهما. أوجد

أيضا علاقة الفرق التماثل ومصفوفتها المنطقية.

الحل

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$M'_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad M'_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن فإن المصفوفتين المنطقتين لعلاقتي الفرق هما:

$$M_{\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} \wedge M'_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}} = M'_{\mathcal{R}} \wedge M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R}\Delta\mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}\mathcal{S}} \vee M_{\mathcal{S}\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5-16- Properties of Operations on Relations العلاقات على العمليات

تتمتع العمليات على العلاقات بالخواص الآتية التي تعتمد في برهانها على جبر المجموعات:

١. إذا كانت \mathcal{R} ، \mathcal{S} علاقتين من A إلى B فإن:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{R} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{S}^{-1} & , \quad \mathcal{R} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}' \subset \mathcal{R}' \\ (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})' = \mathcal{R}' \cap \mathcal{S}' & , \quad (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})' = \mathcal{R}' \cup \mathcal{S}' \\ (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1} & , \quad (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1} \end{array}$$

٢. علاقة عاكسة على A، \mathcal{R} لا عاكسة، \mathcal{R}' عاكسة على A.

٣. إذا كانت \mathcal{R} علاقة على A فإن:

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \phi \Leftrightarrow \mathcal{R} \text{ لا متماثلة} \quad , \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{R} \text{ متماثلة}$$

\mathcal{R} : متخالفة $\Leftrightarrow \mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R} = \emptyset$. هي علاقة

التساوى

٤. \mathcal{R} ، \mathcal{S} عاكستان على $A \Leftarrow \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ ، $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$: عاكستان على

.A

\mathcal{R} ، \mathcal{S} متماثلتان على $A \Leftarrow \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ ، $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ متماثلتان على

.A

\mathcal{R} ، \mathcal{S} علاقتا تكافؤ على $A \Leftarrow \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ ، $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ علاقتا تكافؤ على

.A

\mathcal{R} ، \mathcal{S} ناقلتان على $A \Leftarrow \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ ناقلتا على A.

١٦-٥ علاقة الكمال Closure Relation

لتكن \mathcal{R} علاقة على مجموعة A، ولنفرض أن العلاقة \mathcal{R} ينقصها بعض الأزواج

المرتبة حتى تحقق خاصية معينة (مثل التماثل أو النقل أو التكافؤ). فإن أصغر

علاقة تحتوى \mathcal{R} وتحقق تلك الخاصية

بالنسبة لتلك الخاصية وسنرمز لها بالرمز \mathcal{R}^c .

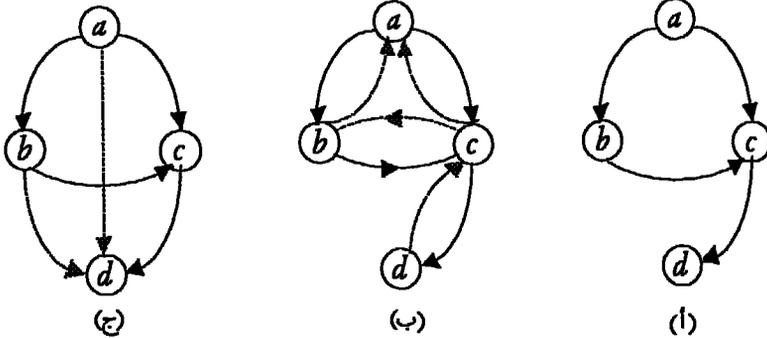
مثال

لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ ولتكن $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d)\}$. أوجد

علاقة الكمال للعلاقة \mathcal{R} : بالنسبة لخاصية التماثل.

الحل

شكل ١٨-٥ (أ) يمثل العلاقة \mathcal{R} : وشكل ١٨-٥ (ب) يمثل علاقة الكمال \mathcal{R}^1 :
بالنسبة لخاصية التماثل وشكل ١٨-٥ (ج) يمثل علاقة الكمال \mathcal{R}^2 : بالنسبة
لخاصية النقل.



شكل ١٨-٥

من الشكل يتضح أن:

$$\mathcal{R}^1 = \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (c,d), (d,c)\},$$

$$\mathcal{R}^2 = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$$

١٧-٥ تركيب العلاقات Composition of Relations

لتكن \mathcal{R} علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، وتكن \mathcal{S} علاقة من المجموعة

B إلى المجموعة C. فإن العلاقة $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ الناتجة من تركيب \mathcal{S} بعد \mathcal{R} هي

علاقة من المجموعة A إلى المجموعة C تعرف كالآتي:

$$a (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) c \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ such that } a \mathcal{R} b, b \mathcal{S} c \quad \forall a \in A, c \in C$$

مثال

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، $C = \{\square, \circ\}$

ولتكن:

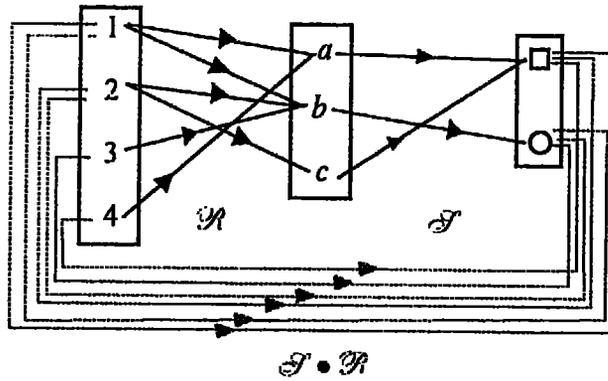
$$\mathcal{R} = \{(1,a), (1,b), (2,b), (2,c), (3,b), (4,a)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(a, \square), (b, \circ), (c, \square)\}$$

أوجد $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

الحل

شكل ١٩-٥ يمثل العلاقتين \mathcal{R} ، \mathcal{S} وعلاقة التركيب $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.



شكل ١٩-٥

من الشكل نجد أن:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, \square), (1, \circ), (2, \square), (2, \circ), (3, \circ), (4, \square)\}$$

ومن الواضح أن العلاقة $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ لا يمكن تعريفها جنباً إلى جنب مع $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ إلا إذا كان $A = B = C$. وحتى في هذه الحالة فإننا لا نضمن أن تتساوى

١٠٠: \mathcal{R} مع \mathcal{S} ١٠٠: \mathcal{R} .

مثال

لتكن \mathcal{R} ، \mathcal{S} معرفتين على $A = \{1,2,3,4\}$ كالآتي:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\},$$

$$\mathcal{S} = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,3)\}$$

فإن:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1,2), (1,4), (1,1), (2,3), (2,4), (3,1), (4,3)\}$$

في حين أن:

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(1,2), (1,4), (1,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,3), (4,3)\}$$

نظرية

لتكن \mathcal{R} علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، ولتكن \mathcal{S} علاقة من المجموعة

B إلى المجموعة C. إذا كانت $M_{\mathcal{R}}$ هي المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة \mathcal{R}

، $M_{\mathcal{S}}$ هي المصفوفة المنطقية الممثلة للعلاقة \mathcal{S} فإن:

$$M_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}} \otimes M_{\mathcal{S}}$$

حيث $M_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}$ هي المصفوفة المنطقية للعلاقة $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ الناتجة من تركيب \mathcal{S}

بعد \mathcal{R} .

وبرهان هذه النظرية ينتج من تعريف ضرب المصفوفات المنطقية.

لتكن \mathcal{R} ، \mathcal{S} معرفتين على $A = \{1,2,3,4\}$ كالآتي:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,4), (3,2)\},$$

$$I = \{(1,4), (1,3), (3,1), (4,1)\}$$

أوجد المصفوفة المنطقية لكل من $M_{X,Y}$ ، $M_{Y,Z}$ ، $M_{X,Z}$ ، $M_{Z,X}$ ، $M_{Z,Y}$ ، $M_{Y,X}$.

الحل

$$M_{X,Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{Y,Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{X \circ Y \circ Z} = M_{X,Y} \otimes M_{Y,Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{Z \circ X \circ Y} = M_{Y,Z} \otimes M_{X,Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أمثلة متنوعة

مثال (١)

حدد نوع كل من العلاقات الآتية على N :

(أ) عامل من عوامل (ب) ضعف.

الحل

(أ) كل عدد عامل من عوامل نفسه.

(١)

إذن العلاقة عاكسة

إذا كان m عامل من عوامل n فليس من الضروري أن تكون n عامل من عوامل m . إذن العلاقة ليست متماثلة؛ ولكن إذا حدث ذلك فإن $m = n$.

إذن العلاقة شبه متماثلة (٢)

إذا كان m عامل من عوامل n ، n عامل من عوامل p فإن m عامل من عوامل p .

إذن العلاقة ناقلة (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن العلاقة "عامل من عوامل" هي علاقة ترتيب على N .

وإذا أخذنا أي عددين $m, n \in N$ فليس من الضروري أن يكون أحدهما عامل من عوامل الآخر.

إذن العلاقة "عامل من عوامل" هي علاقة ترتيب جزئي على N .

(ب) أي عدد ليس ضعف نفسه.

إذن العلاقة ليست عاكسة (١)

إذا كان m ضعف n فإن n ليس ضعف m .

إذن العلاقة متخالفة (٢)

ضعف الضعف ليس ضعفاً.

إذن العلاقة ليست ناقلة (٣)

لذا فإن العلاقة "ضعف" هي علاقة تخالف فقط على N .

مثال (٢)

لتكن " ~ " معرفة على $N \times N$ كالآتي:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p$$

أثبت أن العلاقة " ~ " هي علاقة تكافؤ وأوجد فصول التكافؤ.

الحل

حيث أن $m + n = n + m$ ، إذن $(m, n) \sim (m, n)$ إذن العلاقة " ~ " علاقة

عاكسة على $N \times N$ (١) حيث أن:

$$m + q = n + p \Rightarrow p + n = q + m.$$

إذن:

$$(m, n) \sim (p, q) \Rightarrow (p, q) \sim (m, n)$$

إذن العلاقة " ~ " متماثلة على $N \times N$ (٢)

حيث أن:

$$m + q = n + p, p + s = q + r \Rightarrow m + s = n + r$$

إذن:

$$(m, n) \sim (p, q), (p, q) \sim (r, s) \Rightarrow (m, n) \sim (r, s)$$

إذن العلاقة " ~ " ناقلة على $N \times N$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن العلاقة " ~ " علاقة تكافؤ على $N \times N$

$N \times N$ بكتابة بالصورة:

$$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \dots,$$

$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \dots,$$

$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \dots,$$

$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), \dots,$$

.....

نجد أن فصول التكافؤ هي:

$$\dots, \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), \dots\}, \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), \dots\},$$

$\{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), \dots\}, \{(3,1), (4,2), (5,3), (6,4), \dots\}, \dots$

مثال (٣)

أكتب العلاقة على المجموعة $A = \{a, b, c, d, e\}$ التي مصفوفتها المنطقية هي:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وارسم شكلها المتجه. أوجد علاقة الكمال لها بالنسبة لخاصية الانعكاس.

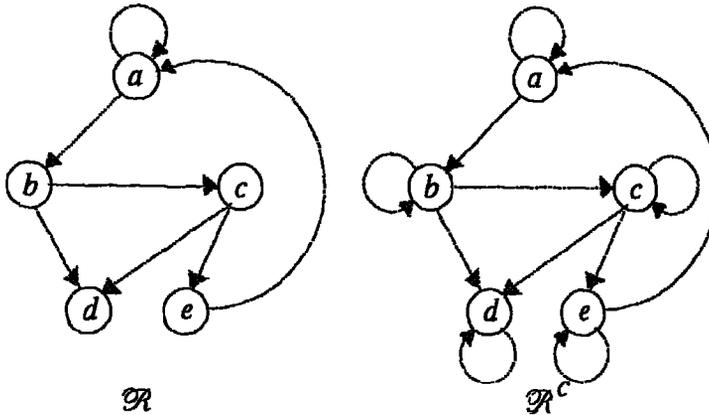
الحل

العلاقة هي:

$$\mathcal{R} = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,d), (c,e), (e,a)\}$$

ويبين شكل ٢٠-٥ العلاقة \mathcal{R} وعلاقة الكمال \mathcal{R}^c بالنسبة لخاصية

الانعكاس.



شكل ٢٠-٥

إذن:

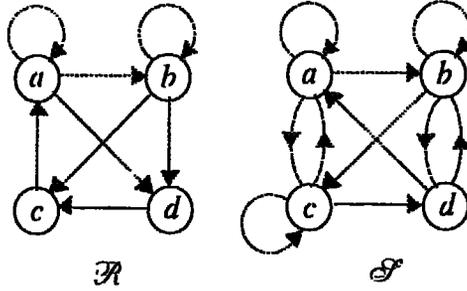
$$\mathcal{R}' = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (b,d), (c,c), (c,d), (c,e), (d,d), (e,a), (e,e)\}$$

ومصفوفتها المنطقية هي:

$$M_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٣)

أوجد المصفوفة المنطقية لكل من العلاقتين \mathcal{R} ، \mathcal{S} الموضحتين بشكل ٢١-٥:



شكل ٢١-٥

ومن ثم أوجد \mathcal{R}^{-1} ، $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ ، $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ ، \mathcal{R}' .

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{S}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ $\mathcal{R}' = \{(a, d), (b, a), (c, a), (c, b), (c, c), (d, b), (d, c)\}$,
 $\mathcal{S}^{-1} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, d),$
 $(d, a), (d, c), (d, d)\}$,
 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, d), (d, a)\}$,
 $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a),$
 $(c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$

تمرين ٥-١

١. بين أى من العلاقات الآتية عاكسة - متماثلة - لا متماثلة - شبه متماثلة -

تكافؤ - ترتيب على N:

- (أ) عامل من عوامل. (ب) نصف.
 (ج) يساوى. (د) أقل من.

٢. حدد نوع كل من العلاقات الآتية على R:

$$x R y \Leftrightarrow x + y + 1 = 1 \quad (\text{ب}) \quad x R y \Leftrightarrow x < y \quad (\text{أ})$$

$$x R y \Leftrightarrow x + y = 1 \quad (\text{د}) \quad x R y \Leftrightarrow xy \quad (\text{ج})$$

$$x R y \Leftrightarrow x + y > 2 \quad (\text{هـ})$$

(

٣. مثل كلا من العلاقات الآتية على \mathbb{R} :

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x < y\} \quad (\text{أ}) \quad \mathcal{R} = \{(x, y) : x = y\} \quad (\text{ب})$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x = y, y = 2\} \quad (\text{ج})$$

٤. لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن العلاقة \mathcal{R} : معرفة على X كالآتي:

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \#(A) = \#(B) \quad \forall A, B \in P(X)$$

حيث $\#(A)$ ترمز لعدد عناصر المجموعة A ، $\#(B)$ ترمز لعدد عناصر المجموعة B .
أثبت أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ وأوجد فصل التكافؤ الذى عنصره المثل المجموعة $\{1, 2\}$.

٥. أوجد عدد العلاقات العاكسة وعدد العلاقات المتماثلة على مجموعة عدد عناصرها n .

٦. أى من العلاقات الآتية تكافؤ؟

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x < y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{ب}) \quad m \mathcal{R} n \Leftrightarrow m = n \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (\text{أ})$$

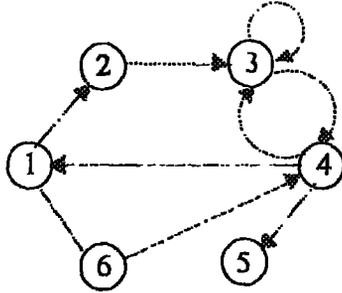
$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{د}) \quad m \mathcal{R} n \Leftrightarrow m = n \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{ج})$$

٧. أكتب العلاقة التى مصفوفتها المنطقية:

$$M_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وارسم شكلها المتجه. أوجد علاقة الكمال لها بالنسبة لخاصية النقل.

٩. في الشكل المتجه الآتي:



(أ) أكتب جميع المسارات ذات طول 1 وذات طول 2 وذات طول 3.

(ب) أكتب جميع المسارات التي تبدأ من ٢ والتي تبدأ من 6.

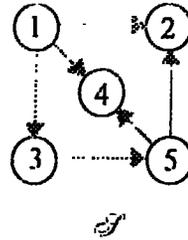
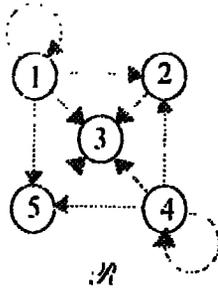
١٠. حدد نوع كل من العلاقات الآتية (عاكسة - متماثلة - لا متماثلة - شبه

متماثلة - تكافؤ - ترتيب):

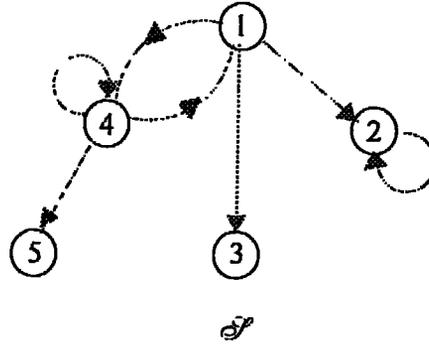
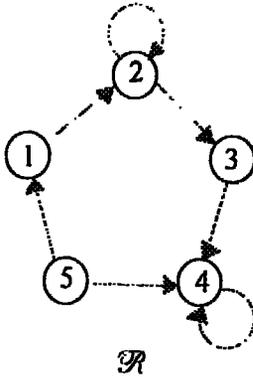
(أ) على $A = \{1,2,3,4\}$ والتي مصفوفتها المنطقية هي:

$$M_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) التي شكلها المتجه هو:



١١. أكتب العلاقتين المبيتين بالشكلين الآتين وأكتب مصفوقيهما المنطقيتين:



١٢. إذا كانت \mathcal{R} علاقة من A إلى B ، \mathcal{S} ، \mathcal{T} علاقتين من B إلى C فاثبت أن:

$$(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \quad (أ)$$

$$(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \quad (ب)$$

الباب السادس

الرواسم

MAPPINGS

تعريف ١-٦٠

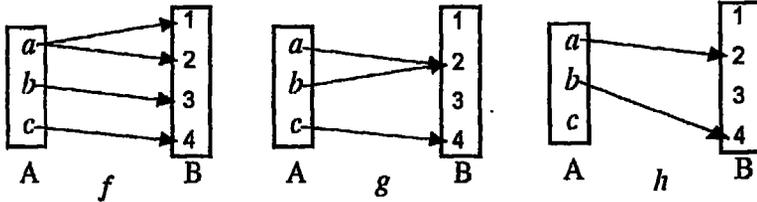
لتكن \mathcal{R} علاقة من A إلى B . إذا كان لكل $a \in A$ يوجد عنصر واحد فقط $b \in B$ بحيث $a \mathcal{R} b$ فإن هذه العلاقة تسمى "mapping" للمجموعة A إلى المجموعة B وعندئذ نكتب $\mathcal{R} : A \rightarrow B$. وتميزا للرواسم عن العلاقات سنستخدم الرموز f, g, h, \dots بدلا من الرمز \mathcal{R} . أى أن:

$$f : A \rightarrow B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A, \exists ! b \in B \text{ such that } (a, b) \in f \subset A \times B$$

وبدلا من كتابة $a f b$ للدلالة على أن (a, b) ينتمي للراسم f سنكتب $a \mapsto b$ وتقرأ "العنصر a يرسم إلى العنصر b بواسطة الراسم f " أو $b = f(a)$ وتقرأ " b هي صورة العنصر a بالنسبة للراسم f " ويكون عندئذ العنصر a "أصلا" للعنصر b بالنسبة للراسم f .

مثال (١)

أى من العلاقات الآتية تكون راسما للمجموعة A إلى المجموعة B ؟ لماذا؟



شكل ١-٦

الحل

العلاقة f ليست راسما حيث أنالعنصر a له صورتان 1 ، 2 .
العلاقة g راسم حيث أن لكل عنصر من عناصر A صورة واحدة فقط في B .
العلاقة h ليست راسما حيث أن العنصر c ليس له صورة في B .

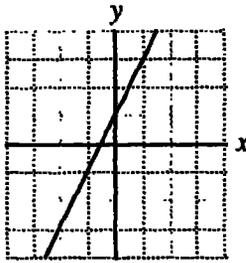
مثال (٢)

أي من العلاقات الآتية تكون راسما لمجموعة الأعداد الحقيقية R إلى R ؟

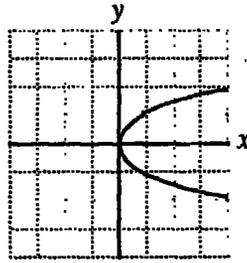
$$y = 2x + 1 \quad , \quad y^2 = x \quad , \quad y = x^2$$

الحل

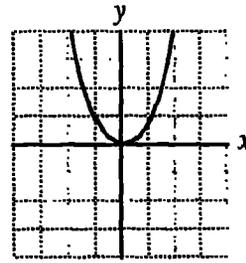
شكل ٦-٢ يبين التمثيل البيان لهذه العلاقات:



$$y = 2x + 1$$



$$y^2 = x$$



$$y = x^2$$

شكل ٦-٢

واضح من الأشكال أن العلاقة $y = 2x + 1$ تمثل راسما حيث أن لكل قيمة حقيقية x توجد قيمة واحدة y . كذلك العلاقة $y^2 = x$ لا تمثل راسما حيث أن لكل قيمة حقيقية x توجد قيمتان $y = \sqrt{x}$ ، $y = -\sqrt{x}$. أما العلاقة $y = x^2$ فتمثل راسما حيث أنه لكل قيمة حقيقية x توجد قيمة واحدة y تساوي x^2 .

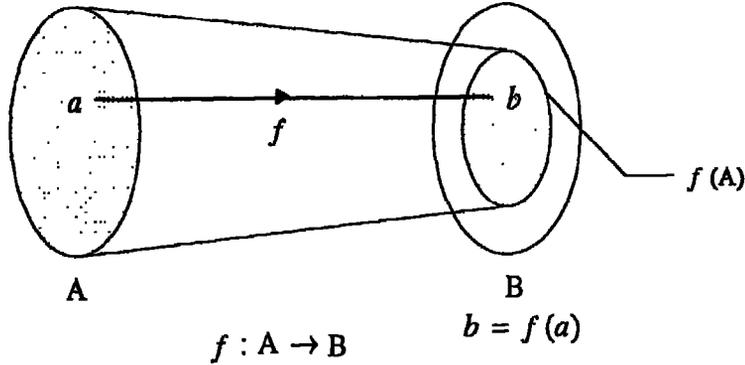
ملحوظة

غالباً ما يطلق على الراسم لمجموعة الأعداد الحقيقية R (أو مجموعة جزئية منها)

إلى R اسم دالة حقيقية *real function*.

٢-٦ مجال ومدى الراسم Domain and Range of a mapping

ليكن $f: A \rightarrow B$ راسماً للمجموعة A إلى المجموعة B . يطلق على المجموعة A اسم المجال *Domain* ويطلق على المجموعة B اسم النطاق المصاحب *codomain*. وتسمى مجموعة الصور بالنسبة لهذا الراسم المدى *range* ويرمز له بالرمز $f(A)$. (لاحظ أن $f(A) \subset B$ أى أن المدى مجموعة جزئية من المجال المصاحب). ونستخدم أحياناً رسماً للتعبير عن النطاق والنطاق المصاحب والمدى لراسم ما (أنظر شكل ٣-٦).



شكل ٣-٦

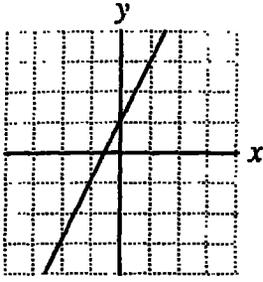
مثال

عين مجال ومدى الدوال الحقيقية الآتية:

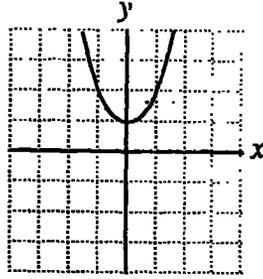
$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + 1, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

الحل

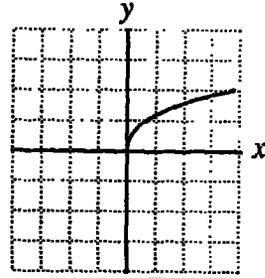
شكل ٤-٦ يبين الرسوم البيانية لهذه الدوال.



$$y = 2x + 1$$



$$y = x^2 + 1$$



$$y = \sqrt{x}$$

شكل ٤-٦

واضح من الشكل أن مجال الدالة $f(x) = 2x+1$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ومداهها هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ، الدالة $g(x) = x^2 + 1$ مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ومداهها هو الفترة $[1, \infty)$. أما الدالة $h(x) = \sqrt{x}$ فمجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الغير سالبة $[0, \infty)$ ومداهها أيضا $[\infty)$. (لاحظ أن x لا يجب أن تكون سالبة. لماذا؟)

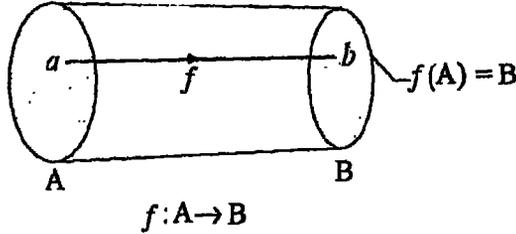
٣-٦ أنواع الرواسم Types of Mappings

لنفرض أن لدينا قاعة مجهزة بعدد من المقاعد وأن هناك عددا من الأشخاص داخل هذه القاعة. إذا جلس كل الأشخاص على مقاعد بحيث أن أى شخص لا يجتلس أكثر من مقعد واحد (لاحظ إمكانية أن يشترك اثنان أو أكثر في مقعد واحد) فإن عملية الجلوس هذه تُكوّن راسمًا لمجموعة الأشخاص A إلى مجموعة المقاعد B ($f : A \rightarrow B$) ويحدد نوع الراسم في هذا المثال تبعًا لكيفية الجلوس نفسها: فإذا شُغلت جميع المقاعد قيل أن الراسم فوقى *onto* أو غامر

surjective ، وإذا لم يشغل أى مقعد بأكثر من شخص واحد قيل أن الراسم أحادى *one-to-one* أو *injective* . أما إذا كان عدد المقاعد مساويا لعدد الأشخاص بالضبط فإنه يقال أن الراسم هو تطبيق *Injection* أو *one to one and onto* . وسنعطى فيما يلي تعريفا رياضيا لكل نوع من أنواع الرواسم:

٦-٣-١ الراسم الغامر (التوقى) *Onto (surjective) Mapping*

يقال أن الراسم $f : A \rightarrow B$ كان المدى يستغرق المجال المصاحب تحه أى إذا كان $f(A) = B$ أنظر شكل ٦-٥).



شكل ٦-٥

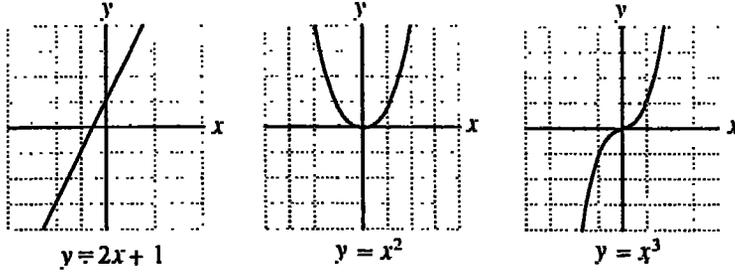
مثال

أى من الدوال الحقيقية الآتية تكون راسما غامرا؟

$$y = 2x + 1 \quad , \quad y = x^2 \quad , \quad y = x^3$$

الحل

شكل ٦-٦ يبين الرسوم البيانية لتلك الدوال:



شكل ٦-٦

من الشكل يتضح أن:

بجال الدالة $y = 2x + 1$ هو \mathbb{R} ومداهها هو \mathbb{R} أيضا. إذن فالرسم هنا غامر.
بجال الدالة $y = x^2$ هو \mathbb{R} ولكن مداها هو $[0, \infty)$. إذن فالرسم هنا غير غامر.
بجال الدالة $y = x^3$ هو \mathbb{R} ومداهها هو \mathbb{R} أيضا. إذن فالرسم هنا غامر.
ملاحظة:

يمكن أن نجعل الدالة $y = x^2$ رسما غامرا إذا حددنا المجال المصاحب ليكون المجموعة $[0, \infty)$ بدلا من \mathbb{R} أى أن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ رسم غير غامر في حين أن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ حيث $f(x) = x^2$ رسم غامر.

وهذا يدعونا إلى التأكيد على أن الرسم $f: A \rightarrow B$ يتحدد بثلاثة مكونات: المجال A والمجال المصاحب B وقاعدة التعيين f وأي تغيير في أحد تلك المكونات يُعرّف رسما آخر ولذا في بعض الأحيان يكتب الرسم $f: A \rightarrow B$ بالصورة $(A, B; f)$.

٦-٣-٢ الرسم الأحادي (الحافن) One to one (Injective) Mapping

يكون الرسم $f: A \rightarrow B$ أحاديا إذا كان:

$$\underline{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in A}$$

أى إذا تساوت صورتان فلا بد أن يتساوى أصليهما. وهذا التعريف يكافئ منطقيا التعريف الآتى:

يكون الراسم $f: A \rightarrow B$ أحاديا إذا كان:

$$\underline{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A}$$

أى إذا اختلف أصلان فلا بد أن تختلف صورتيهما.
مثال

أى من الدوال الحقيقية الآتية يكون راسما أحاديا:

$$y = 2x+1 \quad , \quad y = x^2 \quad , \quad y = x^3$$

الحل

فى الدالة $y = 2x+1$ إذا كانت $y_1 = 2x_1 + 1$ ، $y_2 = 2x_2 + 1$ فإن:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

إذن فالدالة أحادية.

فى الدالة $y = x^2$ إذا كانت $y_1 = x_1^2$ ، $y_2 = x_2^2$ فإن:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \text{أو} \quad x_1 + x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{أو} \quad x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

فمثلا إذا كانت $y = 4$ فإن $x = 2$ أو $x = -2$ وعلى ذلك فإن الدالة $y = x^2$ ليست أحادية.

$$\begin{aligned} & \text{في الدالة } y = x^3 \text{ إذا كانت } y_1 = x_1^3, y_2 = x_2^3 \text{ فإن:} \\ y_1 = y_2 & \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \\ & \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \\ & \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0 \\ & \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ أو } x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \\ & \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

أما الحل الآخر فمفروض لأنه يعطى قيمة تخيلية. أى أن كل قيمة حقيقية للمتغير y تناظرها قيمة حقيقية واحدة للمتغير x ؛ وعلى ذلك تكون الدالة أحادية (يمكن لنا التحقق من النتائج السابقة بالنظر إلى شكل ٦-٧).

٦-٣-٣ التطبيق (التناظر الأحادي) (Bijjective) Mapping

يكون الراسم $f: A \rightarrow B$ تناظرا أحاديا إذا كان:

(أ) f راسم غامر.

(ب) f راسم أحادي.

أى أن f يكون تناظرا أحاديا إذا كان:

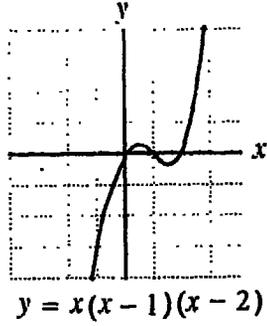
$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1), f(x_2) \in B$$

مثال ١

أى من الدوال الآتية يكون تناظرا أحاديا؟

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x(x-1)(x-2)$$

الحل

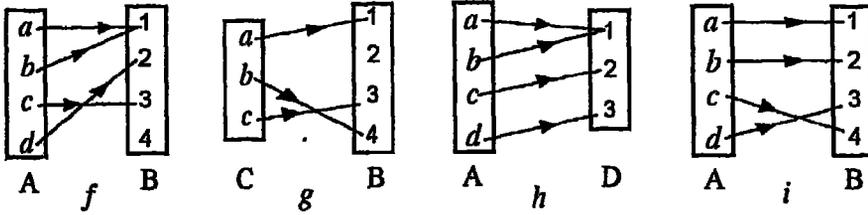


شكل ٦-٧

سبق أن أثبتنا أن الدالة $f(x) = 2x + 1$ أحادية وغامرة. إذن هي تناظر أحادي. وقد أثبتنا أيضا أن الدالة $g(x) = x^2$ ليست غامرة وليست أحادية. إذن فهي ليست تناظر أحادي. أما الدالة $h(x) = x(x-1)(x-2)$ فهي غامرة ولكنها ليست أحادية (أنظر شكل ٦-٧).

مثال (٢)

أي من الرواسم المبينة في شكل ٦-٨ تناظر أحادي؟ وما السبب؟



شكل ٦-٨

الحل

الرسم f ليس غامرا وليس أحاديا. إذن فهو ليس تناظرا أحاديا.
 الرسم g أحادي ولكن ليس غامرا. إذن فهو ليس تناظرا أحاديا.
 الرسم h غامر ولكن ليس أحاديا. إذن فهو ليس تناظرا أحاديا.
 الرسم i غامر وأحادي. إذن هو تناظر أحادي.

ويعتبر التناظر الأحادي في غاية الأهمية، إذ بواسطته يمكن عمل تناظر بين المجموعات المختلفة فمثلا التناظر الحادث بين مجموعة النقط على الخط المستقيم ومجموعة الأعداد الحقيقية والتناظر الحادث بين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الزوجية.. الخ.

٤-٦ عدد الرواسم للمجموعات المحدوده العناصر

لنفرض عدد العناصر في المجموعة A هو m وعدد العناصر في المجموعة B هو n . سبق أن بينا أن عدد العلاقات التي يمكن إنشاؤها من A إلى B يساوي 2^m ،

أما عدد الرواسم التي يمكن إنشاؤها من A إلى B فيمكن تصوره كالآتي:

تخيل أن عناصر المجموعة A هي كرات a_1, a_2, \dots, a_m وأن عناصر المجموعة B هي حفر b_1, b_2, \dots, b_n . الكرة a_1 ستستقر في إحدى الحفر بطرق عددها n ، والكرة a_2 ستستقر في إحدى الحفر بطرق مستقلة عن طرق استقرار الكرة الأولى بطرق عددها n أيضا (لاحظ أنه لا يمنع استقرار الكرة الثانية في نفس الحفرة التي استقرت فيها الكرة الأولى) ...

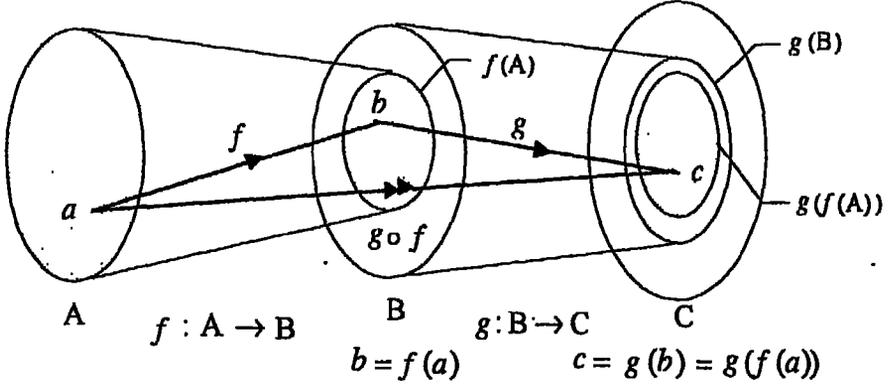
وهكذا بالنسبة لبقية الكرات. إذن عدد الطرق التي يمكن أن تستقر بها جميع الكرات يساوي $n \times n \times \dots \times n$ (m من المرات) أي n^m . إذن عدد رواسم المجموعة A إلى B يساوي $\#A^{\#B}$ حيث $\#A$ يرمز لعدد عناصر المجموعة A، $\#B$ يرمز لعدد عناصر المجموعة B. لنبحث الآن عدد الرواسم الأحادية للمجموعة A إلى المجموعة B:

الكرة الأولى ستستقر بطرق عددها n . وحيث أن الراسم أحادي وغير مسموح

أن تستقر أكثر من كرة في حفرة واحدة. إذن فالكرة الثانية تستقر بطرق عددها $1 - n$ وبالمثل الكرة الثالثة تستقر بطرق عددها $2 - n \dots$ وهكذا إلى الكرة الأخيرة التي تستقر بطرق عددها $(n-m+1) \dots (n-2)(n-1)n$ أى P_m^n (بشرط أن تكون $n \geq m$). إذن عدد الرواسم الأحادية للمجموعة A إلى المجموعة B يساوى P_B^n . أما إذا بحثنا عن عدد التناظرات الأحادية للمجموعة A إلى المجموعة B فبادىء ذي بدء يجب أن يكون $m = n$ لماذا؟ الكرة الأولى تستقر بطرق عددها n والكرة الثانية تستقر بطرق عددها $1 - n$ والكرة الثالثة تستقر بطرق عددها $2 - n \dots$ وهكذا إلى أن تبقى حفرة واحدة تستقر فيها الكرة الأخيرة. إذن عدد الطرق كلها يساوى $n!$ إذن عدد التناظرات الأحادية يساوى $|A|!$

٥-٦ تحصيل الرواسم Composition of Mappings

ليكن f راسما للمجموعة A إلى المجموعة B ($f : A \rightarrow B$) وليكن g راسما للمجموعة B إلى المجموعة C ($g : B \rightarrow C$). الراسم f يرسم العنصر $a \in A$ إلى العنصر $b \in B$ أى $b = f(a)$ والراسم g يرسم العنصر $b \in B$ إلى العنصر $c \in C$ أى $c = g(b)$ (أنظر شكل ٦-٩).



شكل ٦-٩

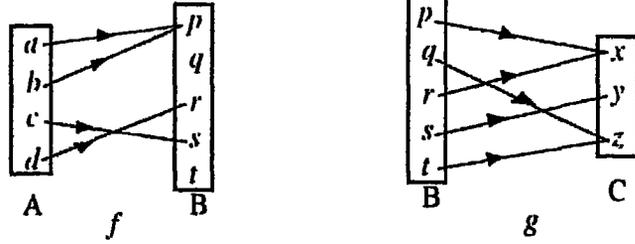
الرسم الذى يرسم a مباشرة إلى c هو تحصيل الراسمين f ، g (بعد f)
 ويسمى الرسم المحصل *composite mapping* ويرمز له بالرمز $g \circ f$ ويعرف
 كالآتى:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A, f(a) \in f(A), g(f(a)) \in g(f(A))$$

والترتيب فى تحصيل الرواسم فى غاية الأهمية، إذ أن الرسم $f \circ g$ قد لا يكون
 مُعرِّفاً على الإطلاق وحتى إذا كان معرفاً فإنه بوجه عام لا يتساوى مع $g \circ f$.

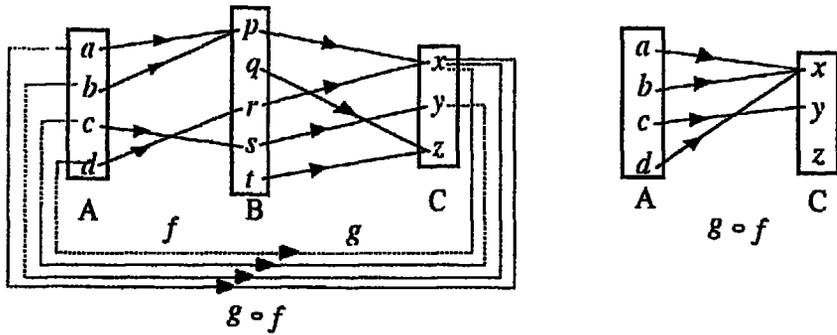
مثال (١)

لتكن $C = \{x, y, z\}$ ، $B = \{p, q, r, s, t\}$ ، $A = \{a, b, c, d\}$ ولتكن
 $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow C$ معرفتين بالمخططين السهميين المبينين بشكل



شكل ٦-١٠

فإن الراسم المحصل $g \circ f$ يمثله المخطط السهمي المبين بشكل ٦-١١:



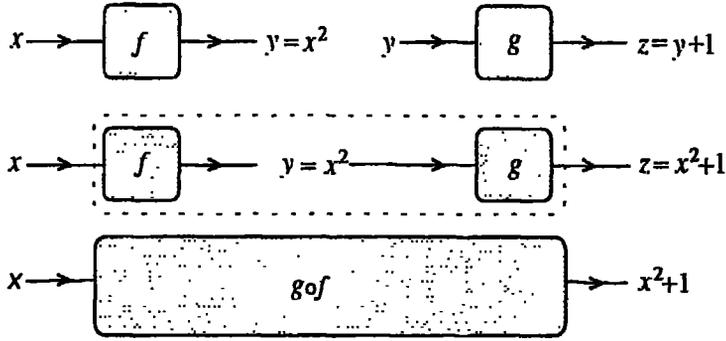
شكل ٦-١١

(لاحظ أن الراسم $f \circ g$ غير معرف).

مثال (٢)

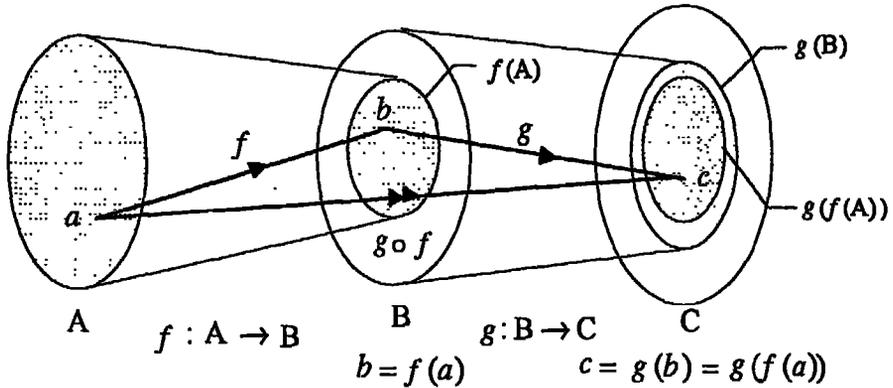
لتكن $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x+1$ دالتان حقيقتان. الدالة f يمكن تمثيلها بالمعادلة $y = x^2$ والدالة g يمكن تمثيلها بالمعادلة $z = g(y) = y+1$. إذن الدالة المحصلة $g \circ f$ يمكن تمثيلها بالمعادلة $z = x^2 + 1$. ويمكن تصور هذا التحصيل كما يلي:

الصندوق f يحول المتغير x إلى x^2 والصندوق g يحول المتغير x إلى $x+1$.
 وحيث أننا نطبق الدالة g بعد f ، إذن فإن ذلك يكون بمثابة إدخال المتغير x في
 الصندوق f أولاً ليكون الناتج x^2 ثم ندخل الناتج x^2 في الصندوق g فيكون
 الناتج $x^2 + 1$ (أنظر شكل ١٢-٦).



شكل ١٢-٦

لنبحث الآن الدالة المحصلة $f \circ g$ (f بعد g). يمكن تصور هذه الدالة المحصلة
 بأن ندخل المتغير x في الصندوق g أولاً ليكون الناتج $x + 1$ ثم ندخل الناتج
 $x + 1$ في الصندوق f فيكون الناتج $(x+1)^2$ (أنظر شكل ١٣-٦).

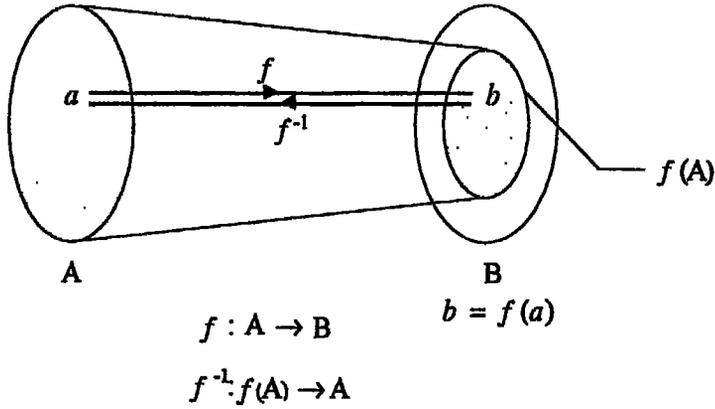


شكل ١٣-٦

واضح من هذا المثال أن الدالة المحصلة $f \circ g$ لا تساوي الدالة المحصلة $g \circ f$.

٦-٦ الرواسم العكسية Inverse mappings

ليكن f راسما احاديا للمجموعة A إلى المجموعة B . كل عنصر $a \in A$ يرسم إلى عنصر وحيد $b \in B$ حيث $b = f(a)$ وبما أن الراسم f أحادي، إذن $f(a)$ صورة لعنصر وحيد ينتمي إلى A وهو a (أنظر شكل ٦-١٤).



شكل ٦-١٤

أي أنه لكل عنصر b ينتمي إلى مدى الدالة $f : A \rightarrow B$ (أي إلى $f(A)$) فإنه يوجد عنصر وحيد a ينتمي إلى A بحيث $b = f(a)$ وهذا يُعرَّف راسما يرسم

$f(a)$ ثانية إلى a . هذا الراسم يسمى الراسم العكسي *inverse mapping* للراسم f ويرمز له بالرمز f^{-1} . أي أن:

$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b \in f(A), a \in A, b = f(a)$$

وذلك بشرط أن يكون f أحاديا.

ومن الواضح أن:

$$\underline{(f \circ f^{-1})(b) = b \quad \forall b \in f(A)} \quad , \quad \underline{(f^{-1} \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A}$$

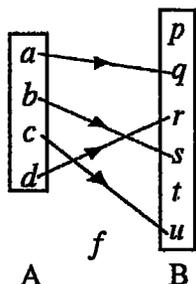
ملحوظات

إذا كان الراسم $f: A \rightarrow B$ تناظرا أحاديا، أي إذا كان f أحادي وغامر فإن

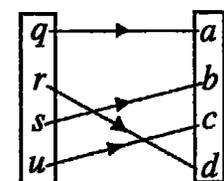
$f(A) = B$ ويُعرّف الراسم العكسي f^{-1} عندئذ كالآتي:

$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow a \in A, b \in B$$

* إذا كان الراسم $f: A \rightarrow B$ أحاديا فإن الراسم العكسي $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$



شكل ٦ - ١٥



شكل ٦ - ١٦

يكون تناظرا أحاديا.

مثال (١)

أوجد الراسم العكسي للراسم المبين
بالمخطط السهمي بشكل ٦-١٥.

الحل

الراسم $f: A \rightarrow B$ أحادي ، مدى

الراسم هو $f(A) = \{q, r, s, u\}$.

الراسم العكسي $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$

مبين بشكل ٦-١٦.

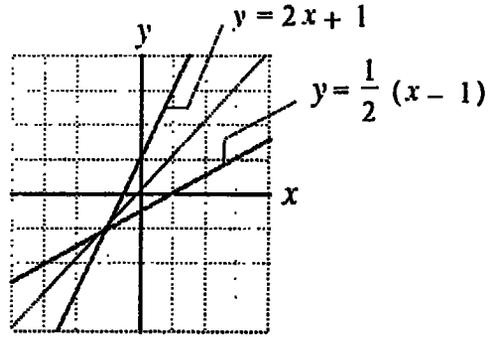
واضح أن هذا الراسم تناظر أحادي.

مثال (٢)

الدالة $f(x) = 2x + 1$ هي تناظر أحادي لـ \mathbb{R} إلى \mathbb{R} . وهذه الدالة لها

معكوس $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ يعطى كالآتي:

نضع $y = 2x + 1$ ونحصل على x بدلالة y فنجد أن $x = \frac{1}{2}(y-1)$ ثم نبديل y ، x فنحصل على الدالة $y = \frac{1}{2}(x-1)$. وبذلك تكون الدالة $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)$ هي معكوس الدالة $f(x) = 2x + 1$ (أنظر شكل ١٧-٦) ولاحظ أن منحنى الدالتين $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ متماثلان حول المستقيم $(y = x)$.



شكل ١٧-٦

أمثلة متنوعة

مثال (١)

لتكن $X = \mathbb{R} - \{3\}$ ، $Y = \mathbb{R} - \{2\}$ ولتكن $f: X \rightarrow Y$ مُعرَّفة كالاتي:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \quad \forall x \in X$$

أثبت أن الراسم f تناظر أحادي وأوجد معكوسه.

الحاصل

$$\begin{aligned}f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-3} = \frac{2x_2+1}{x_2-3} \\&\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-3) = (2x_2+1)(x_1-3) \\&\Rightarrow 2x_1x_2 - 6x_1 + x_2 - 3 = 2x_1x_2 - 6x_2 + x_1 - 3 \\&\Rightarrow 7x_1 = 7x_2 \\&\Rightarrow x_1 = x_2\end{aligned}$$

(١)

إذن f راسم أحادي

$$\begin{aligned}y = \frac{2x+1}{x-3}, x \in X &\Rightarrow y(x-3) = 2x+1 \\&\Rightarrow xy - 3y = 2x+1 \\&\Rightarrow x(y-2) = 3y+1 \\&\Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}, y \in Y\end{aligned}$$

إذن كل $y \in Y$ يناظرها $x \in X$.

(٢)

إذن f راسم غامر

من (١) ، (٢) نستنتج أن f تناظر أحادي يعطى راسمه العكسي $f^{-1}: Y \rightarrow X$ كالاتي:

$$\begin{aligned}y = f^{-1}(x) &\Leftrightarrow x = f(y) \\&\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-3}, y \neq 3 \\&\Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-2}, x \neq 2\end{aligned}$$

مثال (٢)

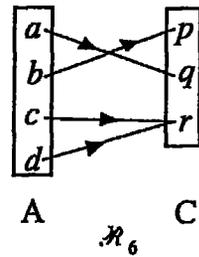
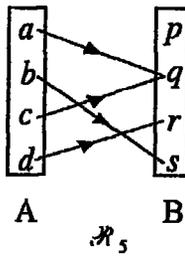
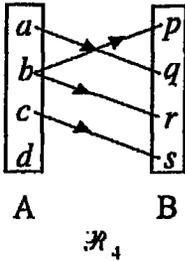
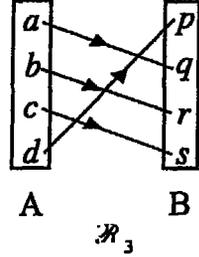
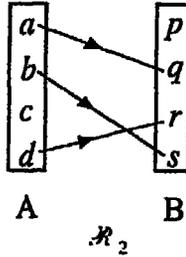
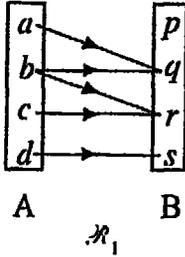
إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x^2 + 1$ أوجد كلا من $f \circ g$ ، $g \circ f$

الحل

$$(g \circ f)(x) = x + 1 \quad . \quad (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

تمارين (٣)

١. أي من العلاقات الآتية يكون راسماً؟ حدد نوع هذا الراسم (أحادي - غامر - تناظري):



٢. ضع معادلة لكل راسم من الرواسم الآتية على \mathbb{R} :

(أ) لكل عدد حقيقي عين مكعبه.

(ب) لكل عدد حقيقي عين العدد 5.

(ج) لكل عدد حقيقي موجب عين مربعه ولكل عدد حقيقي غير موجب عين العدد

(د) لكل عدد حقيقي سالب عين العدد -1 ولكل عدد حقيقي غير سالب عين العدد

.1

٣. ليكن $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ معرفة كالآتي:

$$f(p) = p^2 \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

عين نوع هذا الراسم وأوجد $f(\mathbb{Z})$. عين نوع الراسم المعين بنفس القاعدة والذي مجاله \mathbb{N} وعين معكوسه (إذا وجد).

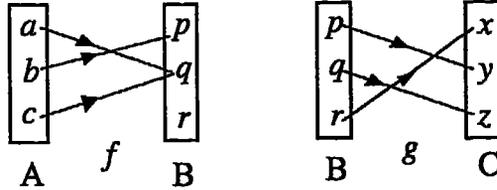
٤. الراسم الذي يعين لكل عدد من الأعداد $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ عددا غير مكرر a_i من نفس

المجموعة يسمى تبديلية permutation للمجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ ويكتب

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array} \right) . \text{ إذا كانت } p = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right), q = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \text{ تبديلتين}$$

للمجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ فأوجد $p^{-1}, q^{-1}, p \circ q, q \circ p$.

٥. لتكن $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ معرفتين كالآتي:



أوجد $g \circ f$ ومدى كل من $f, g, g \circ f$.

٦. لتكن $A = B = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ ؛ ولتكن f, g, h, i, j, k معرفة كالآتي:

$$f(x) = x, g(x) = 1 - x, h(x) = \frac{1}{x}, i(x) = \frac{1}{1 - x}, j(x) = \frac{x}{x - 1}, k(x) = \frac{x - 1}{x}$$

أثبت أن محصلة أى اثنين من هذه الرواسم هو راسم من تلك الرواسم.

٧. أوجد معكوس كل من الرواسم الآتية:

$$(أ) f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \frac{x+1}{2} \quad (ب) g: [0, \infty) \rightarrow [-1, \infty), g(x) = x^2 - 1$$

$$h:]-1, \infty) \rightarrow]0, \infty), h(x) = \frac{2x-1}{3} \quad (\text{د}) \quad h:]-1, \infty) \rightarrow]0, \infty), h(x) = \sqrt{x+1} \quad (\text{ج})$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{إذا كانت} \quad .8$$

فأوجد كلا من r^{-1} ، $p \circ (r \circ q^{-1})$ ، $(q \circ p) \circ r$ ، $r \circ p$ ، p^{-1} ، $r \circ (q \circ p^{-1})$.

٩. أثبت أنه إذا وجد ثمانية أشخاص ، فإن اثنين منهم على الأقل لابد أن يكونوا قد ولدوا في يوم واحد من الأسبوع.

١٠. أثبت أنه إذا اخترنا أحد عشر عددا من المجموعة $\{1, 2, \dots, 20\}$ فإن واحدا منهم على الأقل لابد أن يكون مضاعفا لآخر.

١١. أثبت أنه إذا كان لدينا n من الكرات نريد إدخالها في m من الحفر ، $m < n$ ، فإن حفرة منها لابد أن تحتوي على $1 + \frac{n-1}{m}$ من الكرات على الأقل.

١٢. أثبت أنه إذا وجد ثلاثون شخصا ، فإن خمسة منهم على الأقل لابد أن يكونوا قد ولدوا في يوم واحد من الأسبوع.

الباب السابع

الزمرة و كود التعويض

GROUPS AND SUBSTITUTION CODES

العمليات الثنائية Binary Operations ١-٧

لتكن A مجموعة غير خالية. إذا عيّننا لكل زوج مرتب (a, b) ينتمي للمربع الكرتيزي $A \times A = A^2$ عنصرا وحيدا c ينتمي للمجموعة A نفسها فإن هذا التعيين يعتبر راسما للمربع الكرتيزي A^2 إلى A ويسمى هذا الراسم عسبنا ثنائية $Binary Operation$ على المجموعة A ؛ فمثلا عملية الجمع "+" على مجموعة الأعداد الطبيعية N يمكن تصورها كراسم بالطريقة الآتية:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} + \\ (1,1) \mapsto 2 \end{array}, \begin{array}{l} + \\ (1,2) \mapsto 3 \end{array}, \begin{array}{l} + \\ (1,3) \mapsto 4 \end{array}, \dots \\ \begin{array}{l} + \\ (2,1) \mapsto 3 \end{array}, \begin{array}{l} + \\ (2,2) \mapsto 4 \end{array}, \begin{array}{l} + \\ (2,3) \mapsto 5 \end{array}, \dots \\ \begin{array}{l} + \\ (3,1) \mapsto 4 \end{array}, \begin{array}{l} + \\ (3,2) \mapsto 5 \end{array}, \begin{array}{l} + \\ (3,3) \mapsto 6 \end{array}, \dots \end{array}$$

أى أن $N \times N \rightarrow N$: +. أى أن عملية الجمع "+" هي عملية ثنائية على N (لاحظ أن عملية الطرح "-" ليست عملية ثنائية على N حيث أن:

$$(1,2) \mapsto -1 \notin N$$

وتميزا للعمليات الثنائية عن الرواسم العادية سنرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$+, \cdot, \times, *, \oplus, \otimes, \# , \dots$$

 وسنصطلح على أن نكتب مثلا $a \# b = c$ بدلا من أن نكتب $c \mapsto (a, b)$ حيث العملية الثنائية هنا هي # . ويستحسن أحيانا أن نستخدم جدولا لتمثيل العملية الثنائية؛ فمثلا الجدولان الآتيان يمثلان عمليتي الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الطبيعية:

+	1	2	3	4	...
1	2	3	4	5	...
2	3	4	5	6	...
3	4	5	6	7	...
4	5	6	7	8	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

x	1	2	3	4	...
1	1	2	3	4	...
2	2	4	6	8	...
3	3	6	9	12	...
4	4	8	12	16	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ومن المفيد جدا استخدام الجداول خاصة إذا كانت العملية الثنائية على مجموعة عدد عناصرها محدود. ومن الجدول نستطيع أن نستنتج خصائص كثيرة للعملية.

مثال (١)

لتكن $A = \{p, q, r\}$ ولتكن $\circ : A \times A \rightarrow A$ معرفة كالاتي:

$$\begin{array}{l}
 p \circ p = q \quad , \quad p \circ q = p \quad , \quad p \circ r = p, \\
 q \circ p = q \quad , \quad q \circ q = r \quad , \quad q \circ r = q, \\
 r \circ p = r \quad , \quad r \circ q = r \quad , \quad r \circ r = p.
 \end{array}$$

نستطيع تمثيل العملية بالجدول الآتي:

∘	p	q	r
p	q	p	p
q	q	r	q
r	r	r	p

كل عنصر داخل الجدول ينتمي للمجموعة A. إذن العملية "⊕" عملية ثنائية على A.

مثال (٢)

العملية "⊕" المعرفة بالقاعدة الآتية:

$$m \oplus n = 2m + 3n \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

هي عملية ثنائية على \mathbb{N} حيث أن $2m + 3n$ هو عدد طبيعي طالما كان كل من m, n عددا طبيعيا. ويمكن تمثيل هذه العملية بالجدول الآتي:

⊕	1	2	3	4	...
1	5	8	11	14	...
2	7	10	13	16	...
3	9	12	15	18	...
4	11	14	17	20	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

نستطيع من الجدول أن نستنتج مثلا أن $1 \oplus 2 \neq 2 \oplus 1$.

مثال (٣)

أدوات الربط $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ هي عمليات ثنائية على مجموعة فيم الحقيقة $\{0, 1\}$ وتُعرف بالجدول الآتية:

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

,

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

,

\rightarrow	0	1
0	1	1
1	0	1

,

\leftrightarrow	0	1
0	1	0
1	0	1

أما عملية النفي " \sim " فليست عملية ثنائية على المجموعة $\{0, 1\}$ حيث أنها راسم للمجموعة إلى نفسها $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$: وتسمى عملية أحادية unary operation على المجموعة $\{0, 1\}$ معرفة كالاتي:

$$0 \xrightarrow{\sim} 1 \quad , \quad 1 \xrightarrow{\sim} 0$$

أى:

$$\sim 0 = 1 \quad , \quad \sim 1 = 0$$

ملحوظة

كم عملية ثنائية يمكن تعريفها على المجموعة $A = \{0, 1\}$ ؟ لإجابة هذا السؤال نحسب كم راسما لحاصل الضرب الكرتيزى:

$$A \times A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

إلى A يمكن تعريفها. فنجد أن عدد تلك الرواسم يساوى 2^4 أى 16. وبوجه عام إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوى n فإن عدد العمليات الثنائية التي يمكن تعريفها على A يساوى $(n^2)^n$ أى n^{2n} .

الأنظمة ذات العملية الواحدة Systems with one operation

٢-٧

لتكن A مجموعة غير خالية ولتكن \circ عملية ثنائية على A (أى $A \times A \rightarrow A$). المجموعة " A " والعملية الثنائية " \circ " تُكوِّنان ما يسمى بـ نظام ذو عملية واحدة *system with one operation*. وأحيانا يطلق عليه إسم *groupoid* ويرمز له بالرمز $(A; \circ)$ ؛ فمثلا $(\mathbb{N}; +)$ نظام ذو عملية واحدة وهى عملية الجمع " $+$ "، $(\mathbb{N}; \times)$ نظام ذو عملية واحدة هى عملية الضرب " \times "، $(\mathbb{Z}; -)$ نظام ذو عملية واحدة وهى عملية الطرح " $-$ " (لاحظ أن عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z}). أما إذا عرفنا أكثر من عملية ثنائية على مجموعة ما فإننا نكون عندئذ نظاما ذا عمليتين أو أكثر.

خاصية الإبدال Commutative property

ليكن $(A; \circ)$ نظاما ذا عملية واحدة. يقال أن العملية الثنائية \circ إبدالية على A

إذا كان:

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in A$$

فمثلا عملية الجمع "+" إبدالية على N وعملية الضرب "x" إبدالية أيضا على N أما العملية الثنائية " \oplus " المعرّفة على N بالقاعدة:

$$m \oplus n = 2m + 3n \quad \forall m, n \in N$$

فليست إبدالية، إذ أن:

$$n \oplus m = 2n + 3m \neq m \oplus n$$

ونستطيع إدراك ذلك بالنظر في الجدول الآتي الذى يمثل العملية:

\oplus	1	2	3	4	...
1	5	8	11	14	...
2	7	10	13	16	...
3	9	12	15	18	...
4	11	14	17	20	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

فنجد أن $1 \oplus 2 = 8$ في حين أن أن $2 \oplus 1 = 7$ ونلاحظ أن الجدول غير متماثل حول القطر الرئيسى. ويوجه عام إذا كان النظام $(A; \circ)$ ممثلا بجدول فنستطيع أن نتبين من الجدول أن العملية "o" إبدالية أو غير إبدالية إذا كان الجدول متماثل حول قطره الرئيسى (أى أن العناصر متساوية البعد عن القطر الرئيسى متساوية) أو غير متماثل؛ فمثلا في النظامين الآتيين:

\circ	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

*	p	q	r
p	p	r	q
q	q	p	r
r	r	q	p

فإن العملية "o" إبدالية أما العملية "*" فليست إبدالية.

٤-٧ خاصية التجميع Associative Property

ليكن $(A ; \circ)$ نظاما ذا عملية واحدة. يقال أن العملية " \circ " داخجة على A إذا كان:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in A$$

فمثلا كل من عمليتي الجمع والضرب داخجة على \mathbb{N} ؛ إذ أن:

$$(m + n) + p = m + (n + p) \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}$$

$$(m \times n) \times p = m \times (n \times p) \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N}$$

أما العملية \oplus المعرفة على \mathbb{N} بالقاعدة:

$$m \oplus n = 2m + 3n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

فليست داخجة على \mathbb{N} ؛ إذ أن:

$$\begin{aligned} (m \oplus n) \oplus p &= (2m + 3n) \oplus p = 2(2m + 3n) + 3p \\ &= 4m + 6n + 3p \end{aligned}$$

في حين أن:

$$\begin{aligned} m \oplus (n \oplus p) &= m \oplus (2n + 3p) = 2m + 3(2n + 3p) \\ &= 2m + 6n + 9p \end{aligned}$$

تمرين

أثبت أن عملية الطرح "-" ليست داخجة وليست إبدالية على \mathbb{Z} .

ملحوظة

إذا كانت العملية الثنائية معرفة على مجموعة محدودة، فلكي نثبت أنها داخجة

يجب أن نأخذ كل العمليات الممكنة ؛ فمثلا لكي نثبت أن العملية الثنائية

داججة فإننا

\circ	p	q
p	p	q
q	q	p

في النظام $(\{p, q\}; \circ)$ المعروف بالجدول

نحسب كلا من:

$$\begin{aligned} & , p \circ (p \circ q) \quad , (p \circ p) \circ q \quad , p \circ (p \circ p) \quad , (p \circ p) \circ p \\ & , q \circ (p \circ p) \quad , (q \circ p) \circ p \quad , p \circ (q \circ p) \quad , (p \circ q) \circ p \\ & , p \circ (q \circ q) \quad , (p \circ q) \circ q \quad , q \circ (q \circ p) \quad , (q \circ q) \circ p \\ & , q \circ (q \circ q) \quad , (q \circ q) \circ q \quad , q \circ (p \circ q) \quad , (q \circ p) \circ q \end{aligned}$$

فنجد أن:

$$\dots , p \circ (p \circ q) = (p \circ p) \circ q \quad , p \circ (p \circ p) = (p \circ p) \circ p$$

وهذا يثبت أن العملية \circ داخجة.

أما إذا كانت العملية الثنائية معرفة بقاعدة فإننا نثبت كلا من خاصيتي الدمج والإبدال بواسطة القاعدة.

٥-٧ الزمرة The Group

ليكن $(A ; \circ)$ نظاما ذا عملية واحدة. يطلق على هذا النظام إسم زمرة *group* إذا كان يحقق الشروط الآتية مجتمعة:

(١) العملية " \circ " داخجة على A . أى:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in A$$

(٢) يوجد محايد أيسر *left identity* $e \in A$ يحقق:

$$e \circ a = a \quad \forall a \in A$$

(٣) لكل $a \in A$ يوجد معكوس أيسر *left opposite* $a' \in A$ يحقق:

$$\underline{a' \circ a = e}$$

هذا؛ والنظام الذى يحقق الشرط الأول على الأقل يسمى شبه زمرة

semi-group. أما النظام الذى يحقق الشرطين الأول والثانى على الأقل فيسمى *monoid*

وإذا كان النظام - بالاضافة للشروط الثلاثة السابقة - يحقق الشرط الإضافى:

(٤) العملية \circ إبدالية على A ,

فإنه يسمى زمرة إبدالية *commutative group*.

مثال (١)

النظام $(\mathbb{Z}; +)$ يحقق الشروط:

$$(m+n)+p=m+(n+p) \quad \forall m, n, p \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$0+m=m+0=m \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \exists (-m) \in \mathbb{Z} \text{ بحيث } m+(-m)=0 \quad (3)$$

$$m+n=n+m \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

أى أن النظام $(\mathbb{Z}; +)$ هو زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو الصفر ومعكوس أى عنصر هو سالبه.

مثال (٢)

النظام $(\mathbb{Z}; -)$ ليس زمرة حيث أن عملية الطرح "-" ليست داججة على \mathbb{Z} .
أى:

$$(m-n)-p \neq m-(n-p) \quad \forall m, n, p \in \mathbb{Z}$$

مثال (٣)

النظام $(\mathbb{N}; +)$ ليس زمرة حيث أن \mathbb{N} لا تحتوى على عنصر محايد. ولكن النظام يحقق شرطى الدمج (١) والإبدال (٤). إذن فهو شبه زمرة إبدالية.

مثال (٤)

النظام $(\mathbb{N}; \times)$ ليس زمرة حيث أن أى عنصر خلاف الواحد الصحيح ليس له

معكوس (مقلوب). ولكن النظام يحقق شرطى الدمج (١) والإبدال (٤) بالإضافة إلى شرط وجود العنصر المحايد (٢). إذن فهو شبه زمرة إبدالية.

مثال (٥)

النظام الممثل بالجدول

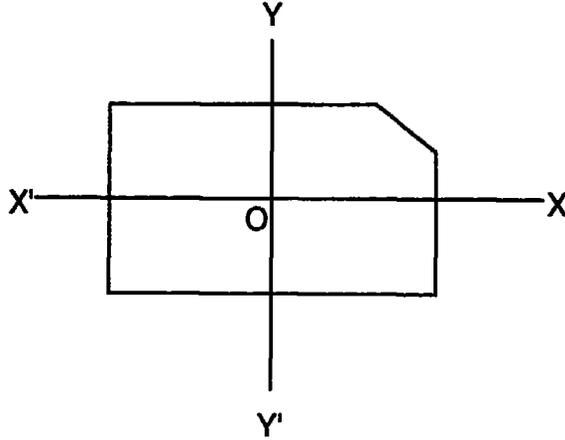
◦	p	q
p	p	q
q	q	p

زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو p

ومعكوس أى عنصر فيها هو العنصر نفسه.

مثال (٦)

خذ قطعه مستطيلة من الورق واقطع ركنًا من أركانها وارسم فيها المحورين المتعامدين OX' ، OY' اللذين يتقاطعان في O (أنظر شكل ٧-١).



شكل ٧-١

لتكن R, V, H, I هي التحويلات الآتية:

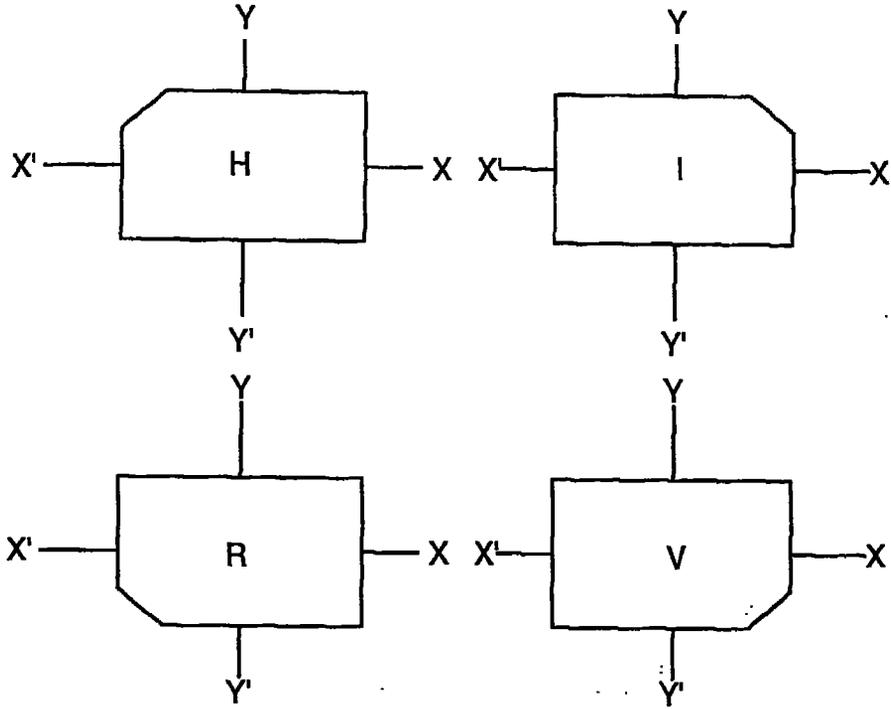
I : أترك الشكل كما هو.

H : أدر الشكل 180° حول المحور $X'OX$.

V : أدر الشكل 180° حول المحور $Y'OY$.

R : أدر الشكل 180° حول النقطة O.

أى أن التحويلات R, V, H, I لها التأثيرات المبينة بشكل ٢-٧.



شكل ٢-٧

ويصبح لدينا مجموعة $T = \{I, H, V, R\}$ هي مجموعة التحويلات المعروفة سابقا.

سنُعرف الآن عملية ثنائية \otimes على T كالآتي:

$H \otimes V$ معناها أدر التحويلة H ثم اتبعها بالتحويلة V فنجد أن المحصلة هي

التحويل R أى أن:

$$H \otimes V = R$$

وكذلك فإن:

$$H \otimes R = V, V \otimes R = H, \dots$$

نستطيع إذن أن نكوّن الجدول الآتى:

\otimes	I	H	V	R
I	I	H	V	R
H	H	I	R	V
V	V	R	I	H
R	R	V	H	I

يتضح من هذا الجدول أن النظام $(\otimes ; T)$ هو زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو I ومعكوس أى عنصر هو العنصر نفسه.

مثال (٧)

النظام المبين بالجدول الآتى يمثل زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو p .

\circ	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

ولكى نعين معكوس عنصر ما وليكن العنصر q فإننا ننظر فى الجدول أفقيا أمام q حتى نجد العنصر المحايد p فنرى أنها تقع تحت r ، فيكون معكوس q هو r . وبالمثل معكوس r هو q .

خواص الزمر Properties of Groups

٦-٧

استخدمنا عند تعريف الزمرة أقل قدر من الشروط حتى لا يكون هناك أى تكرار. وقد استخدم بعض المؤلفين شروطا زائدة عن الحاجة وهذا يؤدي إلى

تكرار غير مطلوب. وسنثبت فيما يلي بعض خواص الزمر مستخدمين الشروط

الأساسية فقط ومفترضين أن الزمرة قيد الدراسة هي $(A; \circ)$:

٧-٦-١ المعكوس الأيسر لعنصر هو أيضا معكوس أيمن له

لنفرض أن a' هو المعكوس الأيسر للعنصر a في الزمرة $(A; \circ)$. أى لنفرض

أن $a \circ a' = e$. بتطبيق الشرط (٢) وهو وجود محايد أيسر نجد أن:

$$a \circ a' = e \circ (a \circ a')$$

لنفرض أن العنصر b هو المعكوس الأيسر للعنصر a' . أى لنفرض أن:

$$b = e \circ a'$$

إذن:

$$\begin{aligned} a \circ a' &= (b \circ a') \circ (a \circ a') \\ &= b \circ (a' \circ (a \circ a')) \end{aligned} \quad \text{[شرط الدمج (١)]}$$

$$= b \circ ((a' \circ a) \circ a') \quad \text{[شرط الدمج (١)]}$$

$$= b \circ (e \circ a') \quad \text{[شرط المعكوس الأيسر]}$$

[٣]

$$= b \circ a' \quad \text{[شرط المحايد الأيسر]}$$

[٢]

$$= e$$

$$\therefore a' \circ a = e = a \circ a'$$

٧-٦-٢ المحايد الأيسر للزمرة هو أيضا محايد أيمن لها

$$a \circ e = a \circ (a' \circ a) = (a \circ a') \circ a = e \circ a = e$$

$$\therefore a \circ e = a = e \circ a$$

وبفضل تلك الخاصية فإننا نذكر فقط العنصر المحايد بدلا من أن نذكر المحايد الأيسر أو المحايد الأيمن.

٧-٦-٣ الحذف الأيسر والحذف الأيمن

سنثبت الآن خاصية الحذف الأيسر:

$$(a \circ b = a \circ c) \Rightarrow (b = c) \quad \forall a, b, c \in A$$

البرهان

ليكن a' هو معكوس a . إذن:

$$(a \circ b = a \circ c) \Rightarrow [a' \circ (a \circ b) = a' \circ (a \circ c)]$$

$$\Rightarrow [(a' \circ a) \circ b = (a' \circ a) \circ c] \quad (\text{شرط الدمج})$$

$$\Rightarrow (e \circ b = e \circ c) \quad (\text{شرط المعكوس})$$

$$\Rightarrow (b = c)$$

وبالمثل يمكن أن نثبت خاصية الحذف الأيمن:

$$(b \circ a = c \circ a) \Rightarrow (b = c) \quad \forall a, b, c \in A$$

٧-٦-٤ وجود ووحدانية حل المعادلات

سنثبت الآن أن المعادلة:

$$a \circ x = b$$

لها حل دائما، وأن هذا الحل وحيد (أي أن المعادلة تتحقق بقيمة وحيدة للمجهول x).

البرهان

بالضرب من اليسار في a' (معكوس a) نجد أن:

$$a' \circ (a \circ x) = a' \circ b$$

$$\therefore (a' \circ a) \circ x = a' \circ b$$

$$\therefore e \circ x = a' \circ b$$

$$\therefore x = a' \circ b$$

وبذلك نكون قد أثبتنا وجود الحل. سنثبت الآن وحدانية ذلك الحل:

لنفرض المعادلة تتحقق بقيمتين k ، k^* . إذن:

$$a \circ k = b , a \circ k^* = b$$

$$\therefore a \circ k = a \circ k^*$$

وبتطبيق خاصية الحذف الأيسر:

$$\therefore k = k^*$$

وبالمثل يمكن أن نثبت أن المعادلة:

$$x \circ a = b$$

لها حل وحيد وهو:

$$x = b \circ a'$$

٥-٦-٧. العنصر المحايد للزمرة هو عنصر وحيد

البرهان

المعادلة $a = a \circ x$ لها حل وحيد $x = e$ ، حيث e هو العنصر المحايد .

٦-٦-٧ معكوس أى عنصر فى الزمرة هو عنصر وحيد

البرهان

المعادلة $a = e \circ x$ لها حل وحيد $x = a'$ ، حيث a' هو معكوس a .

مثال

لتكن $X = \mathbb{R} - \{-1\}$ ولتكن العملية "*" معرفة كالاتى:

$$x * y = x + y + xy$$

أثبت أن النظام $(X ; *)$ زمرة إبدالية وحل المعادلة:

$$x * 4 = -3$$

في هذا النظام.

الحل

(١) العملية "*" إبدالية على X حيث أن:

$$y * x = y + x + yx = x + y + xy = x * y$$

(٢) العملية "*" داجمة على X حيث أن:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + y + xy) * z \\ &= x + y + xy + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + yz + xz + xyz, \\ x * (y * z) &= x * (y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + xy + yz + xz + xyz \\ &= (x * y) * z\end{aligned}$$

(٣) العنصر المحايد هو العنصر $e \in X$ المحدد بالمعادلة:

$$\begin{aligned}e * a &= a & \forall a \in X \\ \therefore e + a + ea &= a & \forall a \in X \\ \therefore e + ea &= 0 & \forall a \in X \\ \therefore e(1 + a) &= 0 & \forall a \in X\end{aligned}$$

وحيث أن $a \neq -1$ ، إذن $e = 0$. أي أن العنصر المحايد هو الصفر.

(٤) معكوس أي عنصر $a \in X$ هو العنصر a^{-1} المحدد بالمعادلة:

$$\begin{aligned}a^{-1} * a &= 0 \\ \therefore a^{-1} + a + a^{-1}a &= 0 \\ \therefore a^{-1}(1 + a) &= -a \\ \therefore a^{-1} &= -\frac{a}{1+a}\end{aligned}$$

إذن النظام $(X; *)$ زمرة إبدالية محايدتها هو 0 ومعكوس أى عنصر a هو
العنصر $-a/(1+a)$.

$$x * 4 = -3 \quad \text{ولحل المعادلة:}$$

نضرب (مستخدمين العملية " $*$ ") كلا من الطرفين من اليمين في معكوس 4
وهو $-\frac{4}{5}$ فنجد أن:

$$(x * 4) * -\frac{4}{5} = -3 * -\frac{4}{5}$$

$$\therefore x * (4 * -\frac{4}{5}) = -3 - \frac{4}{5} + (-3)(-\frac{4}{5})$$

$$\therefore x * 0 = -\frac{19}{5} + \frac{12}{5}$$

$$\therefore x + 0 + 0 \cdot x = -\frac{7}{5}$$

$$\therefore x = -\frac{7}{5}$$

٧-٧: نزع الدائرة Cyclic Groups

لتكن $(A; \circ)$ زمرة. إذا وجد عنصر (أو أكثر) $a \in A$ بحيث يمكن التعبير عن
أى عنصر آخر $b \in A$ بالصورة:

$$b = a \circ a \circ \dots \circ a = a^n$$

فإن العنصر a يسمى مولدا *generator* للزمرة وتسمى n قوة *power*

العنصر b بالنسبة للمولد a ، وعندئذ نسمى الزمرة $(A; \circ)$ زمرة دائرة *cyclic*
group ذات مولد a .

مثال (١)

الزمرة المثلة بالجدول:

\circ	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

زمرة دائرة لها مولدان هما r, q وذلك حيث أن:

$$q_1^1 = q, q_2^2 = q \circ q = r, q_3^3 = q \circ q \circ q = p$$

$$r_1 = r, r_2 = r \circ r = q, r_3 = r \circ r \circ r = p$$

أى أن قوتى العنصرين p, r بالنسبة للمولد q هما 3، 2 على الترتيب ؛ وقوتى العنصرين p, q بالنسبة للمولد r هما 3، 2 على الترتيب.
مثال (٢)

الزمرة الممثلة بالجدول:

x	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

حيث $i = \sqrt{-1}$ ، زمرة دائرة مولداها هما $i, -i$ وذلك لأن:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$$

$$(-i)^1 = -i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$$

وقوى العناصر بالنسبة لهذين المولدين تعطى بالجدول الآتى:

-i	i	-1	1	العنصر
3	1	2	4	قوة العنصر بالنسبة للمولد i
1	3	2	4	قوة العنصر بالنسبة للمولد $(-i)$

مثال (٣)

⊗	I	H	V	R
I	I	H	V	R
H	H	I	R	V
V	V	R	I	H
R	R	V	H	I

الزمرة الممثلة بالجدول:

ليست دائرة إذ أن أى عنصر فيها لا يولد الزمرة. فمثلا:

$$H \otimes H = I, \quad V \otimes V = I, \quad R \otimes R = I,$$

$$H \otimes H \otimes H = H, \quad V \otimes V \otimes V = V, \quad R \otimes R \otimes R = R$$

أى أن أى عنصر لا يولد إلا نفسه أو العنصر المحايد I .

٨-٧ الزمر الجزئية Subgroups

في مثال (٢) السابق لو اقتصرنا في الجدول على الخانتين الأولى والثانية فإننا

نحصل على الجدول المصغر:

x	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

وهو يمثل زمرة أيضا هي $(\{1, -1\}; \times)$. وحيث أن المجموعة $\{1, -1\}$ هي مجموعة جزئية من $\{1, -1, i, -i\}$ لذا نقول أن النظام $(\{1, -1\}; \times)$ هو زمرة جزئية subgroup من النظام $(\{1, -1, i, -i\}; \times)$ أو أن $\{1, -1\}$ هي زمرة جزئية من $\{1, -1, i, -i\}$ بالنسبة للعملية \times .

وفي مثال (٣) السابق لو اقتصرنا في الجدول على الخانتين الأولى والثانية فإننا

نحصل على الجدول المصغر:

\otimes	I	H
I	I	H
H	H	I

وهو يمثل زمرة أيضا هي $(\{I, H\}; \otimes)$.

وحيث أن المجموعة $\{I, H\}$ هي مجموعة جزئية من $\{I, H, V, R\}$ لذا نقول

أن النظام $(\{I, H\}; \otimes)$ هو زمرة جزئية subgroup من النظام (الزمرة)

$(\otimes; \{I, H, V, R\})$ أو أن $\{I, H\}$ هي زمرة جزئية من $\{I, H, V, R\}$ بالنسبة للعملية \otimes . وإذا دققنا النظر سنجد أن $\{I, V\}$, $\{I, R\}$ هما أيضا زمرتان جزئيتان من الزمرة الأصلية $\{I, H, V, R\}$ بالنسبة للعملية \otimes .
مثال (١)

لتكن $X = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ ولتكن العملية \otimes_9 هي الضرب بمقياس ٩ (أى ضرب العددين في بعضهما وطرح مضاعفات 9). يبين أن:
(أ) زمرة إبدالية دائرية وأوجد مولديها وقوى العناصر بالنسبة لكل مولد.
وإذا كانت $Z = \{1, 8\}$ ، $Y = \{1, 4, 7\}$ فاثبت أن:
(ب) كلا من $(Y; \otimes_9)$ ، $(Z; \otimes_9)$ زمرة دائرية جزئية من $(X; \otimes_9)$ وأوجد مولداتها وقوى العناصر بالنسبة لكل مولد.

الحل

(أ) نكوّن الجدول:

\otimes_9	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

من الجدول نستنتج أن:

- العملية \otimes_9 عملية ثنائية على X .
- العملية \otimes_9 دابجة (يمكن إثبات أن عملية الضرب بمقياس دابجة بوجه عام).
- العنصر المحايد هو العنصر 1.

• كل عنصر له معكوس حسب الجدول الآتي:

العنصر	1	2	4	5	7	8
المعكوس	1	5	7	2	4	8

وفضلا عن ذلك فإن:

• العملية \otimes_9 إبدالية (الجدول متماثل حول القطر الرئيسي).

إذن فالنظام $(X; \otimes_9)$ زمرة إبدالية. وبحساب قوى العناصر نجد أن العنصرين ٢

، 5 هما المولدان الوحيدان للزمرة. إذن الزمرة $(X; \otimes_9)$ دائرة مولداها هما

العنصران ٢ ، 5 وقوى عناصرها بالنسبة لهذين المولدين تحسب كالآتي:

$$2^1 = 2 \quad , \quad 2^2 = 2 \otimes_9 2 = 4 \quad , \quad 2^3 = 4 \otimes_9 2 = 8 \quad ,$$

$$2^4 = 8 \otimes_9 2 = 7 \quad , \quad 2^5 = 7 \otimes_9 2 = 5 \quad , \quad 2^6 = 5 \otimes_9 2 = 1 \quad ,$$

$$5^1 = 5 \quad , \quad 5^2 = 5 \otimes_9 5 = 7 \quad , \quad 5^3 = 7 \otimes_9 5 = 8 \quad ,$$

$$5^4 = 8 \otimes_9 5 = 4 \quad , \quad 5^5 = 4 \otimes_9 5 = 2 \quad , \quad 5^6 = 2 \otimes_9 5 = 1$$

أى أن قوى العناصر بالنسبة للمولدين ٢ ، 5 تعطى بالجدول الآتي:

العنصر	1	2	4	5	7	8
قوة العنصر بالنسبة 2 للمولد	6	1	2	5	4	3
قوة العنصر بالنسبة 5 للمولد	6	5	4	1	2	3

(ب) الجدول المصغر:

\otimes_9	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

يمثل زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو 1 ومعكوسات العناصر هي حسب

الجدول الآتي:

7	4	1	العنصر
4	7	1	المعكوس

لذا فإن $(Y; \otimes_9)$ زمرة جزئية من $(X; \otimes_9)$. وهي أيضا زمرة دائرة مولداها

هما 4، 7 وقوى العناصر بالنسبة لهذين المولدين هي:

7	4	1	العنصر
2	1	3	قوة العنصر بالنسبة 4 للمولد
1	2	3	قوة العنصر بالنسبة 7 للمولد

أيضا، الجدول المصغر:

\otimes_9	1	8
1	1	8
8	8	1

يمثل زمرة دائرة مولداها هو العنصر 8. لذا فإن $(Z; \otimes_9)$ زمرة جزئية من الزمرة

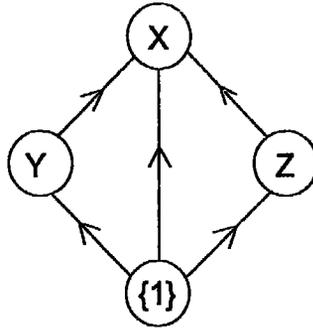
$(X; \otimes_9)$.

ملحوظة

لا يفوتنا هنا أن نذكر أن النظام $(\otimes_9; \{1\})$ الممثل بالجدول:

\otimes_9	1
1	1

زمرة جزئية من الزمرة $(Z; \otimes_9)$ وبالتالي من الزمرة الأصلية $(X; \otimes_9)$.
ويمثل شكل ٣-٧ العلاقة "زمرة جزئية من" ويسمى الشكل العنقودي
Lattice Diagram للزمرة $(Z; \otimes_9)$ وزمرها الجزئية.



شكل ٣-٧

مثال (٢)

ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع، ولتكن M ملتقى المستقيمتان المتوسطة،
ولتكن I, J, K هي الدورانات الآتية:
 I : أترك المثلث كما هو.

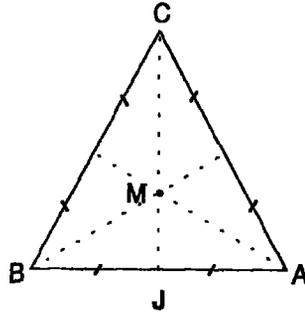
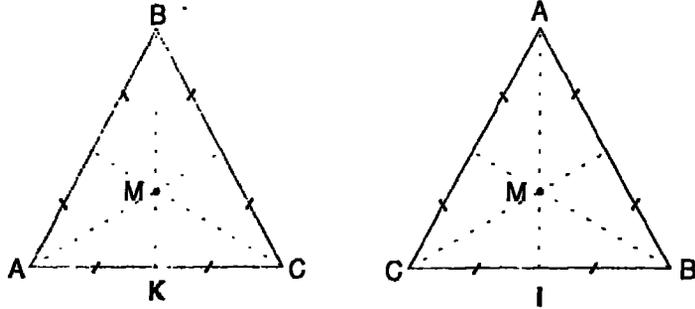
J : أدر المثلث ضد عقارب الساعة حول M زاوية مقدارها 120° .

K : أدر المثلث ضد عقارب الساعة حول M زاوية مقدارها 240° .

أثبت أن النظام (T; \otimes) حيث $T = \{I, J, K\}$ ، ترمز لعملية تحصيل الدورانات هو زمرة دائرية. ماهو مولد تلك الزمرة؟

الحل

شكل ٧-٥ يمثل الدورانات I ، J ، K :



شكل ٧-٥

واضح من الرسم أن:

$$\begin{aligned} I \otimes I &= I , I \otimes J = J , I \otimes K = K, \\ J \otimes I &= J , J \otimes J = K , J \otimes K = I, \\ K \otimes K &= I , K \otimes J = I , K \otimes K = J \end{aligned}$$

نكوّن الجدول:

⊗	I	J	K
I	I	J	K
J	J	K	I
K	K	I	J

ف نجد أنه يمثل زمرة دائرة عنصرها المحايد هو I ومولداها هما J، K وقوى العناصر بالنسبة لهذين المولدين تعطى بالجدول الآتي:

K	J	I	العنصر
2	1	3	قوة العنصر بالنسبة J للمولد
1	2	3	قوة العنصر بالنسبة K للمولد

٩-٧ Isomorphic Groups الزمر المتشاكلّة

إذا دققنا النظر في النظامين الممثلين بالجدولين:

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

,

o	p	q
p	p	q
q	q	p

نجد أنّهما متشابهين تماما في كل شيء عدا أسماء العناصر. وإذا عرفنا الراسم

$$f: \{p, q\} \rightarrow \{1, -1\}$$

$$f(p) = 1, \quad f(q) = -1$$

نجد أن هذا الراسم تناظر أحادي. وعلاوة على ذلك فإن:

$$f(p \circ p) = 1 = 1 \times 1, \quad f(p \circ q) = -1 = 1 \times -1,$$

$$f(q \circ p) = -1 = -1 \times 1, \quad f(q \circ q) = 1 = -1 \times -1$$

أى أن الراسم $\{1, -1\} \rightarrow f: \{p, q\}$ ؛ فضلا عن أنه تناظر أحادى، فإنه يحفظ العمليتين \circ, \times . لذا فإنه يسمى تشابهاً isomorphism ونستطيع عندئذ أن نقول أن النظامين:

\times	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

\circ	p	q
p	p	q
q	q	p

متشاكلان isomorphic . وحيث أن كلا من النظامين زمرة فإننا نقول أن هاتين الزمرتين متشاكلتان. وبوجه عام فإن النظامين $(A; \times)$ ، $(B; \otimes)$ يكونان متشاكلين إذا، و فقط إذا، وجد راسم أحادى $f: A \rightarrow B$ يحفظ العمليتين. والتشاكل في غاية الأهمية؛ إذ عن طريقه يمكن دراسة خواص نظام ما $(A; \times)$ عن طريق دراسة نظام آخر $(B; \otimes)$ إذا علم أنهما متشاكلان. فمثلا أثبتنا أن النظام:

\otimes_9	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو 1 والعنصران 4 ، 7 كل منهما معكوس الآخر. فضلا عن ذلك فهذه الزمرة دائرة مولداها هما 4 ، 7. إذا عرفنا الراسم

$$f: \{1, 4, 7\} \rightarrow \{p, q, r\} \text{ كالتالى:}$$

$$f(1) = p, \quad f(4) = q, \quad f(7) = r$$

نجد أنه تناظر أحادى. فضلا عن ذلك فإن:

$$f(1 \otimes_9 1) = p \circ p, \quad f(1 \otimes_9 4) = p \circ q, \quad f(1 \otimes_9 7) = p \circ r$$

$$f(4 \otimes_9 1) = q \circ p, \quad f(4 \otimes_9 4) = q \circ q, \quad f(4 \otimes_9 7) = q \circ r$$

$f(7 \otimes_9 1) = r \circ p$, $f(7 \otimes_9 4) = r \circ q$, $f(7 \otimes_9 7) = r \circ r$
أى أن الراسم يحفظ العمليتين. إذن فهو تشاكل. وبذلك نكون قد اثبتنا أن
النظام:

o	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

هو أيضا زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو p والعنصران r, q كل منهما
معكوس الآخر. فضلا عن ذلك فهذه الزمرة دائرة مولداها هما r, q .

كود التعويض Substitution Code

٩-٧

هب شخصا يريد إيصال رسالة ما مكونة من عدة حروف إلى صديق بدون أن
يعرف أحد سوى هذا الصديق فحوى تلك الرسالة. فإنه في هذه الحالة يلجأ
إلى عمل شفره "كود" ويتفق مع هذا الصديق على ذلك الكود.
إذا فرضنا أن حروف الأبجدية هي: A, B, C, \dots, Z وعددها 26 حرفا، فإن
أبسط كود ممكن هو إبدال كل حرف بالذى يليه وإبدال الحرف الأخير
بالحرف A . فمثلا الرسالة:

MISSION DONE

تكتب هكذا:

NJTJJPO EPOF

فإذا أعطينا لكل حرف من حروف الأبجدية عددا ابتداء من العدد 1 فإننا
نستطيع أن نعبر عن الكود السابق بالمعادلة:

$$x' = x + 1 \text{ (مقياس 26)}$$

حيث x يرمز للحرف الأصلي، x' يرمز للحرف المرسل بدلا منه.
وعيب تلك الطريقة سهولة اكتشاف الكود. لذلك قد يفكر البعض في عمل
كود آخر وفق المعادلة:

$$x' = 2x+1 \text{ (مقياس 26)}$$

أى أن أى حرف موضعه العدد x يستبدل بالحرف الذى موضعه $2x+1$ ، وإذا
زاد $2x+1$ عن 26 فيطرح العدد 26 (أو مضاعفاته). ولكن سنكتشف أن إعادة
الرسالة إلى شكلها الأصلي بواسطة المرسل إليه مستحيل حيث أن الحرف
المرسل قد يكون له أكثر من نظير واحد في الرسالة الأصلية فمثلا الحرف
المرسل الذى موضعه 3 قد يكون أصله الحرف الذى موضعه 1 أو 14 وأفضل
كود بهذه الطريقة هو ما كانت معادلته:

$$x = nx \text{ (مقياس } m \text{)}$$

حيث العددان m ، n أوليان بالنسبة لبعضهما (أى ليس بينهما أى عامل
مشترك). وإذا فكرنا في إضافة بعض العلامات مثل " + " ، " ، " - " ،
... فإنه يكون لدينا 29 أو 31 أو 37 أو 41 حرفا. المهم أن يكون عدد
الحروف أوليا. لذا فالكود:

$$x' = kx \text{ (مقياس } m \text{)}$$

حيث p عدد أولى، هو كود مناسب دائما . وقد يمكن تغيير k من آن لآخر
باتفاق بين الصديقين خوفا من اكتشاف الشفرة؛ لذا يستحسن أن يحتفظ كل
من الصديقين بجدول يبين الضرب بمقياس p فمثلا جدول الكود:

$$x' = kx \text{ (مقياس 7)}$$

هو:

	x						
k	\otimes_7	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	
2	2	4	6	1	3	5	
3	3	6	2	5	1	4	
4	4	1	5	2	6	3	
5	5	3	1	6	4	2	
6	6	5	4	3	2	1	

حيث افترضنا للسهولة أبجدية مكونة من ستة حروف فقط. من السهل استنتاج

أن هذا الجدول يمثل زمرة دائرة مولداها 3 ، 5.

مثال

أكتب جدول التعويض المعين بالمعادلة:

$$x' = kx \pmod{5}$$

ويبين أنه يُكوّن زمرة دائرة وأوجد مولديها وزمرها الجزئية.

الحل

جدول التعويض هو:

	x				
k	\otimes_5	1	2	3	4
1	1	2	3	4	
2	2	4	1	3	
3	3	1	4	2	
4	4	3	2	1	

الجدول يمثل زمرة إبدالية دائرة عنصرها المحايد هو 1 ومعكوسات العناصر

معطاه بالجدول:

العنصر	1	2	3	4
المعكوس	1	3	2	4
س				

ومولداها هما 2 ، 3. ووضح من الجدول أيضا أن $(\{1,3\}; \otimes_5)$ زمرة جزئية. ملحوظة

إذا عرفنا الراسم $f: \{1, -1, i, -i\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ كالآتي:

$$f(1) = 1, f(-1) = 4, f(i) = 2, f(-i) = 3$$

نجد أنه تناظر أحادي يحفظ العمليتين \otimes_5 ، \times وبذلك يكون النظامان $(\{1, -1, i, -i\}; \times)$ ، $(\{1, 2, 3, 4\}; \otimes_5)$ متشاكلان، وبذلك نستطيع استنتاج جميع الخواص المطلوبة.

تمارين (٧)

١. أثبت أن النظام $(\mathbb{R}; \times)$ حيث \times عملية الضرب هو زمرة إبدالية.

٢. لتكن $X = \mathbb{R} - \{1\}$ ولتكن العملية "*" معرفة على X كالآتي:

$$x * y = x + y - xy$$

أثبت أن النظام $(X; *)$ زمرة إبدالية وحل المعادلة:

$$2 * x = 3$$

في هذا النظام.

٣. أثبت أن النظام $(\mathbb{Z}_8; \otimes)$ زمرة إبدالية وأوجد زمرة الجزئية.

٤. إذا كانت $(A; \circ)$ زمرة وكان:

$$(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1} \quad \forall a, b \in A$$

فأثبت أن الزمرة $(A; \circ)$ إبدالية.

٥. إذا كانت العملية "*" معرفة على مجموعة الأعداد النسبية Q كما يلي:

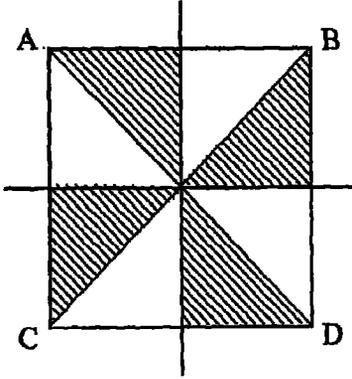
$$(a * b) = a - b + ab \quad \forall a, b \in Q$$

فأثبت أن النظام $(Q; *)$ ليس إبدالياً أو دمجاً.

٦. إذا كانت α ترمز للدوران المربع حول مركزه زاوية 90° ضد عقارب الساعة

فأثبت أن المجموعة $\{I, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ تكون بالنسبة لعملية تحصيل

الدورات زمرة إبدالية دائرة مولدها α .



٧. بالنسبة للشكل المظلل لتكن α رمزا

لانعكاس الشكل على المحور AC.

أثبت أن $(\{I, \alpha\}; \otimes)$ زمرة إبدالية.

٨. بالنسبة للشكل المظلل لتكن p, q, r

هي الانعكاس على المحاور OA, OB,

OC على الترتيب ؛ ولتكن ω ترمز

لدوران الشكل حول O زاوية قياسها 120° ضد عقارب الساعة. أثبت أن النظام $(T; \otimes)$ حيث $T = (I, \omega, \omega^2, p, q, r)$ ، عملية تحصيل التحويلات هو زمرة دائرة غير إبدالية.

٩. أكتب جدول التعويض المعرف بالمعادلة $x' = 4x \pmod{6}$ واثبت أنه لا يكون زمرة.

١٠. إذا كانت $(A; \circ)$ زمرة وكان $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ فاثبت أن الزمرة تكون إبدالية.

تفید
خلود للدعاية والاعلان
ت: ٤١٩٦٢٢٢ (٢٠٢)

مبادئ رياضيات الحاسب

تأليف

أ. د. علي نصر السيد الوكيل

وكيل معهد العبور العالي للإدارة والحاسبات ونظم المعلومات

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

الغاهرة - مصر

الطبعة الأولى

2000م

مبادئ رياضيات الحاسب

تأليف

أ. د. على نصر السيد الوكيل

رقم الإيداع

2000/4221

I.S.B.N

977-282-082-x

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى نحو أو بأى طريقة سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدماتاً.

حقوق الطبع والانتداب

والترجمة والنشر محفوظة

لدار الدولية للاستثمارات الثقافية بش.م.م

8 ابراهيم العرابى- الرحمة الجديدة مصر الجديدة القاهرة ج.م.ع.

ص.ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة تليفون: 2972344 / 2957655 فاكس: 2957655 (00202)

مقدمة الطبعة الأولى

إن الحاسب الإلكتروني الذي أصبح لا يستغنى عنه أحد في عصر المعلومات قد أفاد - ربما أكثر من غيره من المخترعات - من الرياضيات المعاصرة: فدوائره المنطقية في معالجه المركزي الذي هو بمثابة مخ الحاسب تعتمد أساساً على المنطق الرياضي ونظرية المجموعات، والشفرة التي عن طريقها يتعرف الحاسب على الحروف والأرقام والرموز تعتمد على النظام الثنائي للأعداد. أما مزاياه الفريدة في البحث عن الأشكال والأنماط وتعديلها واستنساخها واكتشاف الأخطاء في الأجهزة والبرمجيات فأساسها العلاقات والرواسم والأنظمة الرياضية ذات العمليات.

لذا فإن أراد الدارس لعلوم الحاسب تفهم ما يجري بتلك الآله العجيبة ولا يكون مجرد مستفيد من إمكاناتها التقنية العالية فلا غنى له عن دراسة تلك الموضوعات. ومن يعلم فربما قادته تلك الدراسة إلى تطوير وتعظيم تلك الإمكانيات.

وإن إذ أقدم هذا المؤلف المتواضع أرجو أن أكون قد ساهمت في تبسيط المادة العلمية بدون إخلال بمحتواها حتى تحقق الفائدة المرجوة منها والله الموفق وهو المستعان،،

المؤلف

أ.د. على نصر السيد الوكيل

يناير عام ٢٠٠٠

الباب الأول

المجموعات

SETS

١		مقدمة	١ - ١
١	Concept of a Set	مفهوم المجموعة	٢ - ١
٢	Representation of Sets	تمثيل المجموعات	٣ - ١
٣	Subsets	المجموعات الجزئية	٤ - ١
٤	Equality of Sets	تساوي المجموعات	٥ - ١
٤	The Empty Set	المجموعة الخالية	٦ - ١
٥	The Universal Set	المجموعة الشاملة	٧ - ١
٥	Venn Diagrams	أشكال فن	٨ - ١
٦	Operations on Sets	العمليات الجبرية على المجموعات	٩ - ١
٦	The Union	الإتحاد	١ - ٩ - ١
٨	The Intersection	التقاطع	٢ - ٩ - ١
٩	The Difference	الفرق	٣ - ٩ - ١
١٣	Number of Elements in a Set	عدد عناصر مجموعة	١ - ١
٢٢	Algebra of Sets	جبر المجموعات	١١ - ١
٢٤	Membership Tables	جداول الإنتماء	١٢ - ١
٢٨	Families of Sets	عائلات المجموعات	١٣ - ١
٢٨	The Power Set	مجموعة القوة	١ - ١٣ - ١
٣٠	Partitioning of Sets	تجزئة المجموعات	١٤ - ١
٣٢	Refinement of Partitioning	تكرير التجزئة	١ - ١٤ - ١
٣٣	Minsets	المجموعات الصغرى	١٥ - ١
٣٥	Maxsets	المجموعات الكبرى	١٦ - ١
٣٥		تمرين (١)	

الجزء الثاني

مقدمة في المنطق الرياضي

AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC

٣٩		مقدمة	١-٢
٣٩	Statements	التقارير	٢-٢
٤٠	Truth Values	قيم الحقيقة	٣-٢
٤١	Negation	النفي	٤-٢
٤١	Conjunction	أداة العطف	٥-٢
٤٢	Disjunction	أداة النحير	٦-٢
٤٣	Equivalence	تكافؤ تقريرين	٧-٢
٤٥	Tautology & Contradiction	التقارير الصائبة منطقيًا والباطلة منطقيًا	٨-٢
٤٥	Logical Laws	قوانين المنطق	٩-٢
٤٨	Conditional Junction	أداة الشرط	١٠-٢
٥٠	Bi-directional Conditional Junction	أداة الشرط المزدوج	١١-٢
٥١	Implication	التضمن	١٢-٢
٥٢	Chain Rule	قاعدة التسلسل المنطقي	١٢-٢
٥٣	Arguments	المنجّات	١٣-٢
٥٥	Quantifiers	الأسوار	١٤-٢
٥٦	The Existential Quantifier	سور الوجود	١٤-٢
٥٦	The Universal Quantifier	سور العالمية (الكلية)	١٤-٢
٥٦	Negation of Quantified Sentences	نفي الجمل التي تحوى على أسوار	١٥-٢
٥٧	Logical Matrices	المصفوفات المنطقية	١٦-٢
٥٨	The Join	الوصل	١٦-٢
٥٨	The Meet	الملتقى	١٦-٢
٥٩	The Product	حاصل الضرب	١٦-٢
٦١		أمثلة متنوعة	
٦٦		تمهين (٢)	

الجزء الثالث

نظرية المفاتيح

SWITCHING THEORY

٧١		تقديم	١-٣
٧١	Connection In Series	التوصيل على التوالي	٢-٣
٧٢	Connection in Parallel	التوصيل على التوازي	٣-٣
٧٤	Simplification of Circuits	تبسيط الدوائر	٤-٣
٧٧		استخدام الأشكال الرمزية في نظرية المفاتيح	٥-٣
٨٢	Karna Maps	خرائط كارنوف لاختزال الدوائر	٦-٣
٨٨		تطبيقات متنوعة على نظرية المفاتيح	٧-٣
٩٣		تمرين (٣)	

الجزء الرابع

بعض نظم العد

SOME COMPUTING SYSTEMS

٩٩		لبذة تاريخية	١-٤
١٠١	Binary Number System	نظام العد الثنائي	٢-٤
١٠٤		التحويل من الصورة العنصرية للصورة العشرية	٣-٤
١٠٧	Binary Fractions	الكسور العنصرية	٤-٤
١١١		تحويل الكسور العشرية إلى النظام الثنائي	١-٤-٤
١١٥		التحويل من كسر ثنائي إلى كسر عشري	٥-٤
١١٦	Binary Addition	الجمع ثنائي	٦-٤
١٢٠	Binary Subtraction	الطرح ثنائي	٧-٤
١٢٢	Binary Muliption	الضرب ثنائي	٨-٤
١٢٦	Binary Division	القسمة ثنائي	٩-٤
١٢٩	Designing a Binary Adder	تصميم آلة جمع ثنائي	١٠-٤
١٣٢	Binary Multiplier	تصميم آلة ضرب ثنائي	١١-٤
١٣٤	Binary Codes	الكود الثنائي	١٢-٤

تابع الباب الرابع

١٣٥	Correction Code	الكود المصحح	١-١٢-٤
١٣٧		نظم عد أخرى	١٣-٤
١٣٨	Tetral System	النظام الرباعي	١-١٣-٤
١٣٨		التحويل من النظام العشري إلى النظام الرباعي	
١٤٤	Octal System	النظام الثماني	٢-١٣-٤
١٤٨		الجمع ثمانية	
١٥٠	Hexadecimal System	النظام الست عشري	٢-١٣-٤
١٥٥		الجمع ست عشريا	
١٥٨		أمثلة متنوعة	
١٦١		تعيين (٤)	

الباب الخامس

العلاقات

RELATIONS

١٦٣	Ordered Pairs	الأزواج المرتبة	١-٥
١٦٣	Cartesian Product	حاصل الضرب الكرتيزي	٢-٥
١٦٤	Representation of Cartesian Products	تمثيل حاصل الضرب الكرتيزي	١-٢-٥
١٦٥	Relation from a Set into a Set	العلاقة من مجموعة إلى مجموعة	٣-٥
١٦٦	Methods of Representation of Relations	طرق تمثيل العلاقات	٤-٥
١٦٦	Cartesian Representation	الطريقة الكرتيزية	١-٤-٥
١٦٧	Roaster Method	طريقة الحصر	٢-٤-٥
١٦٧	Arrow Method	طريقة المنحط السهمي	٣-٤-٥
١٦٧	Matrix Method	الطريقة المصفوفية	٤-٤-٥
١٦٨	Number of Relations	عدد العلاقات من مجموعة إلى مجموعة	٥-٥
١٧٠	Relation on a Set	العلاقة على مجموعة	٦-٥
١٧١	Types of Relations on a Set	أنواع العلاقات على مجموعة	٧-٥
١٧١	Reflexive Relation	العلاقة العاكسة	١-٧-٥

تابع الباب الخامس		
١٧٢	Symmetric Relation	العلاقة المتماثلة ٢-٧-٥
١٧٣	Transitive Relation	العلاقة الناقلة ٣-٧-٥
١٧٣	Equivalence Relation	علاقة التكافؤ ٤-٧-٥
١٧٥	Equivalence Classes	فصول التكافؤ ٨-٥
١٨٠	Partial Order Relation	علاقة الترتيب الجزئي ٩-٥
١٨٢	Total Order Relation	علاقة الترتيب الكلي ١٠-٥
١٨٣	Strict Order Relation	علاقة الترتيب القاطع ١١-٥
١٨٤	The Domain and Range of a Relation	مجال العلاقة ومداهما ١٢-٥
١٨٥	Path of a Relation on a Set	مسار العلاقة على مجموعة ١٣-٥
١٨٦	Cycles	الدورات ١٤-٥
١٨٦	Operations on Relations	العمليات على العلاقات ١٥-٥
١٨٦	Complementary Relation	العلاقة المكملة ١-١٥-٥
١٨٨	Inverse Relation	معكوس العلاقة ٢-١٥-٥
١٨٨	Union Relation	علاقة الاتحاد ٣-١٥-٥
١٨٩	Intersection Relation	علاقة التقاطع ٤-١٥-٥
١٩٠	Difference Relations	علاقات الفرق ٥-١٥-٥
١٩٢	Properties of Operations on Relations	خواص العمليات على العلاقات ٦-١٥-٥
١٩٣	Closure Relation	علاقة الكمال ١٦-٥
١٩٤	Composition of Relations	تركيب العلاقات ١٧-٥
١٩٧		أمثلة متنوعة
٢٠٢		تمرين ٥

الباب السادس

الرواسم

MAPPINGS

٢٠٥		تعريف	١-٦
٢٠٧	Domain and Range of a mapping	مجال ومدى الراسم	٢-٦
٢٠٩	Types of Mappings	أنواع الرواسم	٣-٦
٢٠٩	Onto (surjective) Mapping	الرواسم الغامر (التفويقي)	١-٣-٦
٢١٠	One to one (Injective)	الرواسم الأحادي (الحاقن)	٢-٣-٦
٢١٢	One to one and onto (Bijective)	التطبيق (التناظر الأحادي)	٣-٣-٦
٢١٣		عدد الرواسم للمجموعات المحدوده العناصر	٤-٦
٢١٥	Composition of Mappings	تحصيل الرواسم	٥-٦
٢١٨	Inverse mappings	الرواسم العكسية	٦-٦
٢٢٠		أمثلة متنوعة	
٢٢١		تمارين (٣)	

الباب السابع

الزمرة وكود التعويض

GROUPS AND SUBSTITUTION CODES

٢٢٥	Binary Operations	العمليات الثنائية	١-٧
٢٢٨	Systems with one operation	الأنظمة ذات العملية الواحدة	٢-٧
٢٢٨	Commutative property	خاصية الإبدال	٣-٧
٢٣٠	Associative Property	خاصية الدمج	٤-٧
٢٣١	The Group	الزمرة	٥-٧
٢٣٥	Properties of Groups	خواص الزمر	٦-٧
٢٣٦		المعكوس الأيسر لعنصر هو أيضا معكوس أيمن له	١-٦-٧
٢٣٦		التحايد الأيسر للزمرة هو أيضا تحايد أيمن لها	٢-٦-٧
٢٣٧		الحذف الأيسر والحذف الأيمن	٣-٦-٧
٢٣٧		وجود ووحداية حل المعادلات	٤-٦-٧
٢٣٨		العنصر التحايد للزمرة هو عنصر وحيد	٥-٦-٧
٢٣٨		معكوس أى عنصر لى الزمرة هو عنصر وحيد	٦-٦-٧

٢٤٠	Cyclic Groups	الزمر الدائرية	٧-٧
٢٤٢	Subgroups	الزمر الجزئية	٨-٧
٢٤٨	Isomorphic Groups	الزمر المتشابهة	٩-٧
٢٥٠	Substitution Code	كود الترميز	٩-٧
٢٥٣		تمهيد (٧)	
